Sequências
Indução Matemática

Antonio Alfredo Ferreira Loureiro

loureiro@dcc.ufmg.br

http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Introdução

- Uma das tarefas mais importantes da matemática é descobrir e caracterizar padrões regulares.

- Sequência: estrutura matemática mais importante para estudar processos repetidos.

- Indução matemática: ferramenta matemática mais importante para verificar conjecturas sobre padrões de termos em sequências.

Sequências

- Exemplo: Número de ancestrais—Um limite superior

Geração	1	2	3	4	5	6	7...
# ancestrais	2	4	8	16	32	64	128...

- Mais definições:
  - Termo: cada elemento de uma sequência.
    Exemplo: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$
  - Índice ou subscrito: indica a posição do termo na sequência.
    Exemplo: O número 3 no termo a_3 indica o terceiro elemento da sequência.
  - Sequência finita: possui um conjunto finito de termos.
  - Sequência infinita: possui um conjunto infinito de termos.
    Exemplo: $a_1, a_2, a_3, \ldots$
  - Fórmula explícita ou fórmula geral: é a regra que mostra como os valores de a_k podem ser obtidos a partir de k.

Exemplos de sequências definidas por fórmulas explícitas

- Sejam as sequências $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida pela fórmula explícita

$$a_k = \frac{k}{k+1} \qquad \text{para inteiros } k \geq 1$$

e $b_2, b_3, b_4, \ldots$ definida pela fórmula explícita

$$b_i = \frac{i-1}{i} \qquad \text{para inteiros } i \geq 2$$

$$\begin{array}{ll}
a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} & b_2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \\
a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} & b_3 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3} \\
a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} & b_4 = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

– O que as duas sequências têm em comum?

➜ São idênticas.

Exemplos de sequências definidas por fórmulas explícitas

- Sequência alternante:

  Seja a sequência $c_0, c_1, c_2, \ldots$ definida pela fórmula explícita

  $$c_j = (-1)^j \text{ para inteiros } j \geq 0$$

  ➜ Essa sequência possui um conjunto finito de valores: $\{-1, 1\}$.

Achando a fórmula explícita

- A fórmula explícita para a sequência

$$1, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9}, \quad -\frac{1}{16}, \quad \frac{1}{25}, \quad \cdots$$

pode ser

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \text{ para inteiros } k \geq 1$$

ou

$$a_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \text{ para inteiros } k \geq 0$$

➜ Não existe somente uma única fórmula explícita para representar os termos de uma sequência.

Notação para somar termos de uma sequência

- Seja a sequência

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

Existem diversas aplicações em Ciência da Computação onde é importante saber a soma desses termos, ou seja,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Essa soma é representada pela seguinte notação:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}_{\text{Forma expandida}}$$

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), matemático francês/italiano. Propôs o uso da letra maiúscula grega sigma (Σ) para representar a soma de termos.

Exemplos

- $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

- $$\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} + \frac{3}{n+2} + \ldots + \frac{n+1}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{n+k}$$

- $$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{n+2}$$

➜ Este tipo de soma é conhecido como "Soma Telescópica", ou seja é uma soma da forma $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$, onde $a_i = b_i - b_{i+1}$.

Mudança de variável

Observe que

$$\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

e que

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{3} k^2 = \sum_{i=1}^{3} i^2$$

➜ As variáveis k e i são chamadas de "dummy."

$$\sum_{j=2}^{4} (j-1)^2 = \sum_{k=1}^{3} k^2$$

Mudança de variável

- Substitua $k+1$ na soma abaixo por j:

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1}$$

Passos:

(a) Calcule os novos limites do somatório:
  - Para $k=0$, $j=1$.
  - Para $k=6$, $j=7$.

(b) Calcule o termo geral:
  - Como $j=k+1$, então $k=j-1$

  Logo,

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{(j-1)+1} = \frac{1}{j}$$

A soma pode ser reescrita como:

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=1}^{7} \frac{1}{j}$$

Notação para multiplicar termos de uma sequência

- Seja a sequência

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

Deseja-se saber o produto desses termos, ou seja,

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Essa multiplicação é representada pela seguinte notação:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k$$

- Exemplos:
  –
$$\prod_{k=1}^{5} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$
  –
$$\prod_{k=1}^{3} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{24}$$

Propriedades de somas e produtos

Se $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ e $b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ são sequências de números reais e c é um número real qualquer, então as seguintes equações são válidas para qualquer $n \geq m$:

1.
$$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$$

2.
$$c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k$$

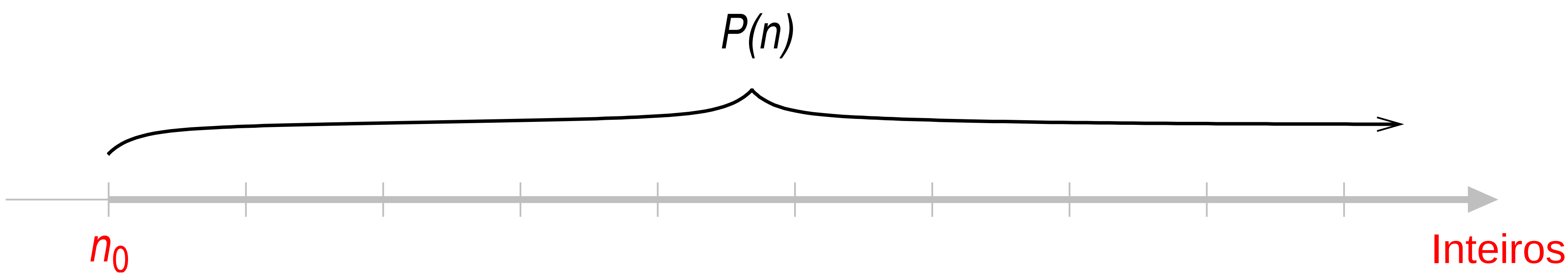
3.
$$\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right) = \prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k)$$

Princípio da indução matemática (fraca)

Seja $P(n)$ um predicado definido para os inteiros n, e seja n_0 um inteiro fixo. Suponha que as duas afirmações seguintes sejam verdadeiras:

1. $P(n_0)$ é V.
2. Para todos inteiros $k \geq n_0$,
   se $P(k)$ é V então $P(k+1)$ é V.

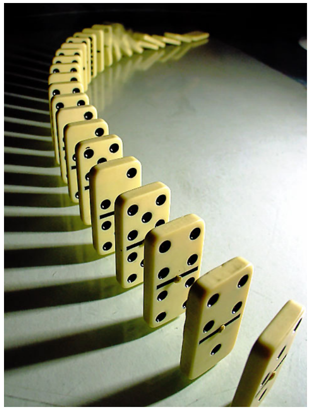
➜ Logo, a afirmação
  para todos inteiros $n \geq n_0$, $P(n)$
  é V.



Princípio da indução matemática

- Técnica aparece pela primeira vez no trabalho do italiano Francesco Maurolico em 1575.
- No século XVII, Pierre de Fermat e Blaise Pascal usam essa técnica em seus trabalhos. Fermat dá o nome de "método do descendente infinito".
- Em 1883, Augustus De Morgan descreve o processo cuidadosamente e dá o nome de indução matemática.

➜ Técnica extremamente importante para a Ciência da Computação.



Para visualizar a idéia da indução matemática, imagine uma coleção de dominós colocados numa sequência (formação) de tal forma que a queda do primeiro dominó força a queda do segundo, que força a queda do terceiro, e assim sucessivamente, até todos os dominós caírem.

Princípio da indução matemática (fraca)

- A prova de uma afirmação por indução matemática é feita em dois passos:
  1. Passo base: é provado que $P(n_0)$ é V para um dado n_0 específico.
  2. Passo indutivo: é provado que para todos inteiros $k \geq n_0$, se $P(k)$ é V então $P(k+1)$ é V.

     O passo indutivo pode ser escrito formalmente como:

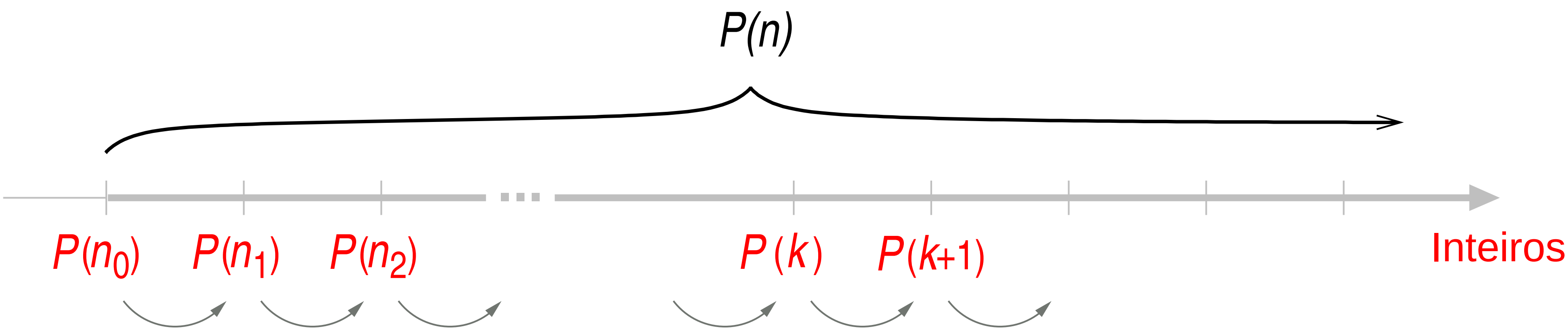
     $$\forall \text{ inteiros } k \geq n_0, \text{ se } P(k) \text{ então } P(k+1)$$

- Pelo método da generalização de um elemento específico genérico, para provar o passo indutivo deve-se:
  - supor que $P(k)$ é V, onde k é um elemento específico mas escolhido arbitrariamente de tal forma que seja maior ou igual a n_0.
  - provar que $P(k+1)$ é V.

Princípio da indução matemática (fraca)

- Este princípio pode ser expresso pela seguinte regra de inferência:

$$[P(n_0) \land \forall k(P(k) \to P(k+1))] \to \forall n P(n).$$



➜ Numa prova por indução matemática ***não é*** assumido que $P(k)$ é verdadeiro para todos os inteiros! É mostrado que se ***for assumido*** que $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ também é verdadeiro.

➜ Assim, na prova por indução matemática devemos usar obrigatoriamente o predicado $P(k)$ (hipótese que estamos supondo ser verdadeira).

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 1

Prove que

$$P(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

para todos inteiros $n \geq 1$.

Prova (por indução matemática):

1. Passo base: $P(n_0) = P(1)$: Para $n_0 = 1$, $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 1$.

2. Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.
   – Suponha que a fórmula é verdadeira para $n = k$, i.e.,

   $$P(k) : 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

   para algum inteiro $k \geq 1$. [hipótese indutiva]

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 1

Deve-se mostrar que

$$P(k+1): 1+2+\ldots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Sabe-se que

$$\begin{aligned}
1+2+\ldots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}\\
&= \frac{k^2+3k+2}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

[Isto era o que devia ser provado.]

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 1: Comentários

Observe que na prova por indução matemática devemos usar obrigatoriamente o predicado $P(k)$. Esse é um dos grandes desafios neste tipo de prova, como veremos em outros exemplos.

A soma

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1),$$

que aparece no predicado $P(k + 1)$, possui os termos 1 a k, cuja soma $(1 + 2 + \ldots + k)$ vale $\frac{k(k+1)}{2}$ pela hipótese indutiva. Como estamos supondo que ela é verdadeira, podemos definir uma igualdade onde esses termos do lado esquerdo são substituídos por essa fração do lado direito:

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1).$$

Princípio da indução matemática (fraca) Exemplo 1: Comentários

Nessa demonstração pode parecer que estamos usando o fato de $P(k)$ ser V para deduzir que $P(k+1)$ é V, para em seguida deduzir que $P(k)$ é V. Parece circular! O que está ocorrendo?

Nao é isso que está acontecendo. Dado um k e o predicado associado, temos duas possibilidades:

(a) $P(k)$ é V

(b) $P(k)$ é F

A hipótese indutiva **não afirma** que $P(k)$ seja verdadeiro. O que afirma é que **caso** $P(k)$ seja V então $P(k+1)$ também será V. Isto é, se k faz com que $P(k)$ seja verdadeiro e, assim, esteja na categoria (a) acima, então $k+1$ também fará com que $P(k+1)$ seja V e, assim, também esteja em (a).

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 1: Comentários

Por exemplo, seja

$$P(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Isto nao é correto! Neste exemplo, o predicado $P(k)$ é falso para **todo** k.

Em geral, devemos tentar mostrar que **caso** $P(k)$ seja V, então $P(k+1)$ também é V.

Isso ficará evidente no próximo exemplo, quando vamos supor que $P(k)$ seja V e vamos chegar a uma contradição para $P(k+1)$. Ou seja, $P(k)$ é F.

Princípio da indução matemática (fraca) Exemplo 2

Prove que

$$P(n) : 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+2)}{2} \qquad \text{ERRADO!}$$

para todos inteiros $n \geq 0$.

Prova (por indução matemática):

1. Passo base: $P(n_0) = P(0)$: Para $n_0 = 0$, $0 = \frac{0(0+2)}{2} = 0$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 0$.

2. Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k+1)$.
   – Suponha que a fórmula é verdadeira para $n = k$, i.e.,

$$P(k) : 0 + 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+2)}{2} = \frac{k^2 + 2k}{2}$$

   para algum inteiro $k \geq 0$. [hipótese indutiva]

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 2

Deve-se mostrar que

$$P(k+1): 0+1+2+\ldots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+3)}{2} = \frac{k^2+4k+3}{2}$$

Sabe-se que

$$\begin{aligned}
0+1+2+\ldots+k+(k+1) &= \frac{k^2+2k}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k^2+2k+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k^2+4k+2}{2}
\end{aligned}$$

[Assim, não foi possível derivar a conclusão a partir da hipótese. Isto significa que o predicado original é falso.]

Princípio da indução matemática (fraca) Exemplo 3

Prove que

$$P(n) : \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

para todos inteiros $n \geq 0$ e para todos números reais r, $r \neq 1$.

Prova (por indução matemática):

1. Passo base: $P(n_0) = P(0)$: Para $n_0 = 0$, $r^0 = 1 = \frac{r^{0+1}-1}{r-1} = \frac{r-1}{r-1} = 1$ e a fórmula é verdadeira para $n_0 = 0$.

2. Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 3

- $P(k) : \sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$, para $k \geq 0$. [hipótese indutiva]
- Deve-se mostrar que $P(k+1) : \sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{r^{k+2}-1}{r-1}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} r^i &= \sum_{i=0}^{k} r^i + r^{k+1} \\
&= \frac{r^{k+1}-1}{r-1} + r^{k+1} \\
&= \frac{r^{k+1}-1}{r-1} + \frac{r^{k+1}(r-1)}{r-1} \\
&= \frac{r^{k+1}-1+r^{k+2}-r^{k+1}}{r-1} \\
&= \frac{r^{k+2}-1}{r-1}
\end{aligned}
$$

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 4

Prove que

$$P(n) : 2^{2n} - 1 \quad \text{é divisível por 3,}$$

para $n \geq 1$.

Prova (por indução matemática):

1. Passo base: $P(n_0) = P(1)$: Para $n_0 = 1$, $2^{2 \cdot 1} - 1 = 3$ que é divisível por 3.

2. Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 4

– $P(k)$: $2^{2k} - 1$ é divisível por 3. [hipótese indutiva]
– Deve-se mostrar que $P(k+1)$: $2^{2(k+1)} - 1$ é divisível por 3.

$$\begin{aligned}
2^{2(k+1)} - 1 &= 2^{2k+2} - 1 \\
&= 2^{2k} \cdot 2^2 - 1 \\
&= 2^{2k} \cdot 4 - 1 \\
&= 2^{2k} \cdot (3+1) - 1 \\
&= 2^{2k} \cdot 3 + (2^{2k} - 1)
\end{aligned}$$

que é divisível por 3.

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 5

Prove que

$$P(n) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1,$$

para $n \geq 0$.

Prova (por indução matemática):

1. Passo base: $P(n_0) = P(0)$: Para $n_0 = 2^0 = 1$, $2^1 - 1 = 1$.

2. Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 5

– $P(k) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$, para $k \geq 0$. [hipótese indutiva]

– Deve-se mostrar que $P(k+1) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 6

Prove que

$$P(n) : H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2},$$

para $n \geq 0$.

H_j representa o número harmônico e é definido por:

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{j}.$$

Prova (por indução matemática):

1. Passo base: $P(n_0) = P(0)$:
   Para $n_0 = 0$, temos $H_{2^0} = H_1 = 1 \geq 1 + \frac{0}{2}$.
2. Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Princípio da indução matemática (fraca) Exemplo 6

- $P(k) : H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$, para $k \geq 0$. [hipótese indutiva]
- Deve-se mostrar que $P(k+1) : H_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k+1}{2}$

$$H_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

[Definição de número harmônico.]

$$= H_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

[Definição de número harmônico.]

$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}}$$

[Hipótese indutiva e existem 2^k termos, cada um pelo menos $1/2^{k+1}$.]

$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\geq 1 + \frac{k+1}{2}.$$

Princípio da indução matemática (fraca) Exemplo 7

Seja a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_k &= 5a_{k-1}, k \geq 2 \end{aligned}$$

Prove que

$$P(n) : a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$$

para $n \geq 1$.

Prova (por indução matemática):

1. Passo base: $P(n_0) = P(1)$: Para $n_0 = 1$, $2 \cdot 5^{1-1} = 2$ e $a_1 = 2$. Logo, a fórmula é válida para $n = 1$.
2. Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 7

– $P(k) : a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$. [hipótese indutiva]
– Deve-se mostrar que $P(k+1) : a_{k+1} = 2 \cdot 5^{(k+1)-1} = 2 \cdot 5^k$.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 5 \cdot a_{(k+1)-1} \\ &= 5 \cdot a_k \\ &= 5 \cdot (2 \cdot 5^{k-1}) \\ &= 2 \cdot (5 \cdot 5^{k-1}) \\ &= 2 \cdot 5^k \end{aligned}$$

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 8

Prove que

$$P(n)\colon\ 2n + 1 < 2^n$$

para todos os inteiros $n \geq 3$.

Prova (por indução matemática):

1. Passo base: $P(n_0) = P(3)$. Para $n_0 = 3$,

   $$2 \cdot 3 + 1 < 2^3.$$

   Logo, a fórmula é válida para $n_0 = 3$.
2. Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \to P(k + 1)$.

Princípio da indução matemática (fraca) Exemplo 8

- $P(k)$: $2k+1 < 2^k$, para $k \geq 3$. [hipótese indutiva]
- Deve-se mostrar que $P(k+1)$: $2(k+1)+1 < 2^{k+1}$.

$$\begin{aligned}
2k+2+1 &= \\
(2k+1)+2 &= \\
(2k+1)+2 &< 2^k+2 \\
2(k+1)+1 &< 2^k+2 \stackrel{?}{<} 2^{k+1}
\end{aligned}$$

Se puder ser mostrado que $2^k+2 < 2^{k+1}$ então o predicado $P(k+1)$ é verdadeiro.

$$\begin{aligned}
2^k+2 &\stackrel{?}{<} 2^{k+1} \\
2 &\stackrel{?}{<} 2^{k+1}-2^k \\
2 &\stackrel{?}{<} 2^k(2-1) \\
2 &\stackrel{?}{<} 2^k \\
1 &< 2^{k-1}, \text{que é verdade para } k \geq 2.
\end{aligned}$$

Em particular, a inequação ($1 < 2^{k-1}$) é válida para $k \geq 3$. Assim, $P(k+1)$ é V.

Princípio da indução matemática (fraca) Exemplo 9

- Prove que para todos os inteiros $n \geq 1$

$$P(n)\text{: } n^3 - n \text{ é divisível por 3.}$$

Prova (por indução matemática):

1. Passo base: $P(n_0) = P(1)$. Para $n_0 = 1$,

$$1^3 - 1 = 0 \text{ é divisível por 3.}$$

   Logo, a fórmula é válida para $n_0 = 3$.
2. Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 9

- $P(k)$: $k^3 - k$ é divisível por 3, para $k \geq 1$. [hipótese indutiva]
- Deve-se mostrar que $P(k+1)$: $(k+1)^3 - (k+1)$ é divisível por 3, para $k \geq 1$.

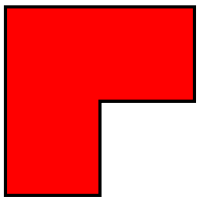
$$
\begin{aligned}
&(k+1)^3 - (k+1) = \\
&(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) = \\
&(k^3 - k) + 3(k^2 + k)
\end{aligned}
$$

O primeiro termo é divisível por 3 (hipótese indutiva) e o segundo também. Como a soma de dois números divisíveis por 3 é um número divisível por 3, então o predicado $P(k+1)$ é V.

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 10

Seja um inteiro $n \geq 1$. Prove que

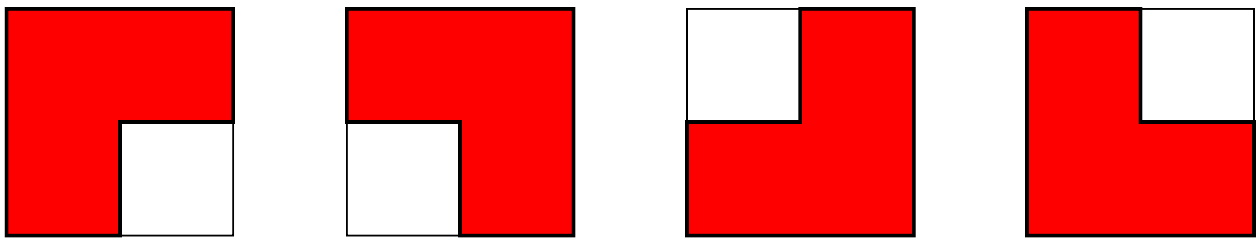
> $P(n)$: qualquer região quadrada de tamanho $2^n \times 2^n$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato L, como mostrado abaixo.



Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 10

Prova (por indução matemática):

1. Passo base: $P(n_0) = P(1)$. P(1) é V já que uma região quadrada de tamanho 2×2, com um quadrado removido, pode se preenchida com peças no formato L, como mostrado abaixo.

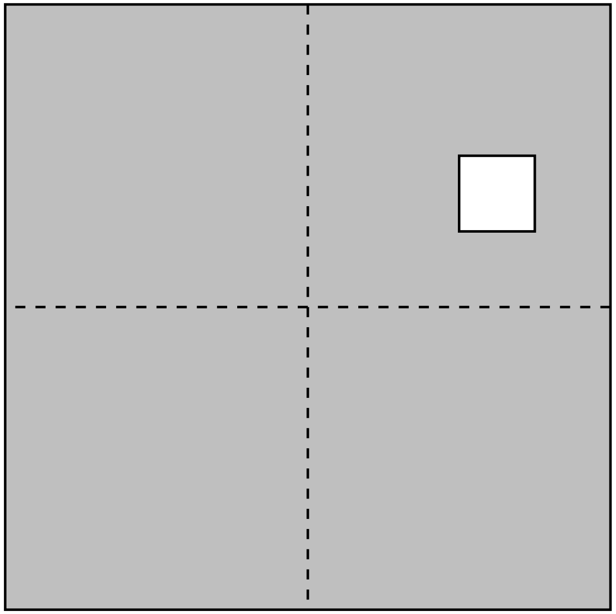


2. Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \to P(k + 1)$.

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 10

– $P(k)$: Qualquer região quadrada de tamanho $2^k \times 2^k$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato L. [hipótese indutiva]
– Deve-se mostrar $P(k+1)$: Qualquer região quadrada de tamanho $2^{k+1} \times 2^{k+1}$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato L.

Considere uma região quadrada de tamanho $2^{k+1} \times 2^{k+1}$, com um quadrado removido. Divida essa região em quatro regiões de tamanho $2^k \times 2^k$ como mostrado abaixo.



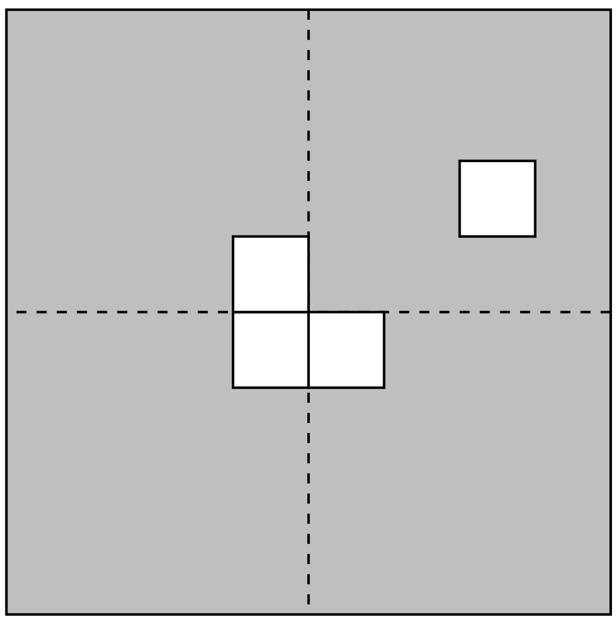
Temos três regiões $2^k \times 2^k$ com nenhum quadrado removido e uma região $2^k \times 2^k$ com um quadrado removido. Ou seja, a região $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ possui apenas um quadrado removido.

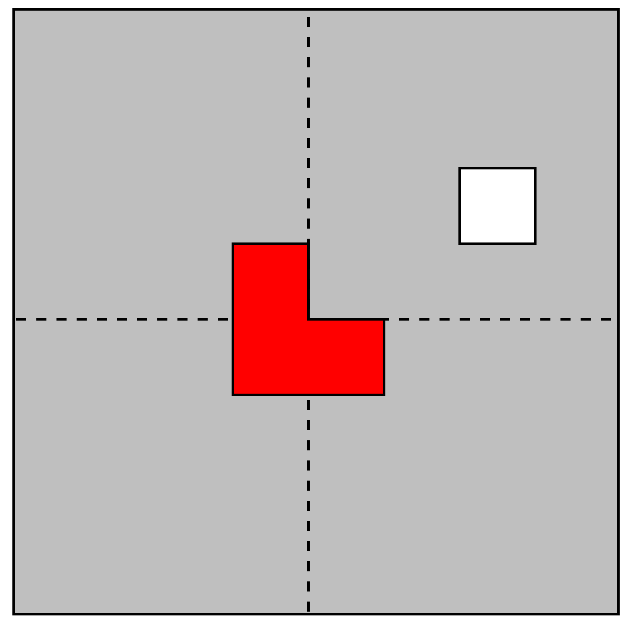
Pela hipótese indutiva, a região $2^k \times 2^k$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato L. O problema passa a ser como a mesma hipótese indutiva pode ser aplicada às outras três regiões.

Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 10

Temporariamente remova um quadrado de cada região $2^k \times 2^k$ que está “completa” como mostrado na figura abaixo à esquerda.

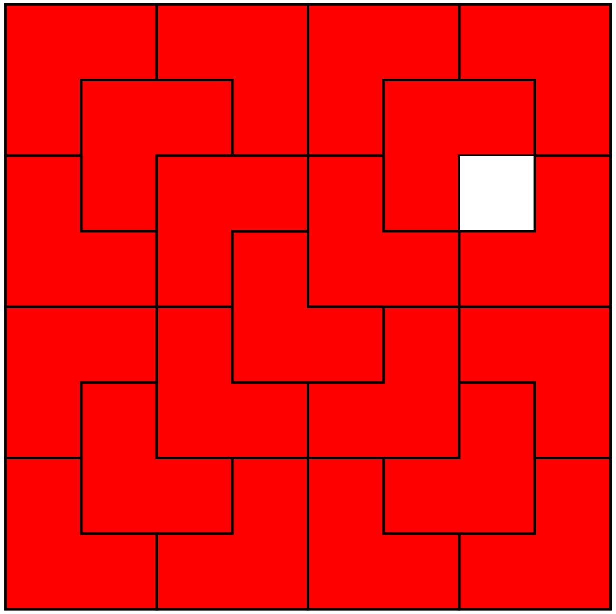
Pela hipótese indutiva cada uma dessas três regiões $2^k \times 2^k$ pode ser preenchida com peças no formato L. No entanto, para resolvermos o problema da peça removida em cada uma dessas três regiões basta colocarmos uma peça L exatamente sobre esses três “buracos” como mostrado na figura abaixo à direita.





Princípio da indução matemática (fraca)
Exemplo 10

Assim, uma região quadrada de tamanho $2^{k+1} \times 2^{k+1}$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato L, como mostrado na figura abaixo.

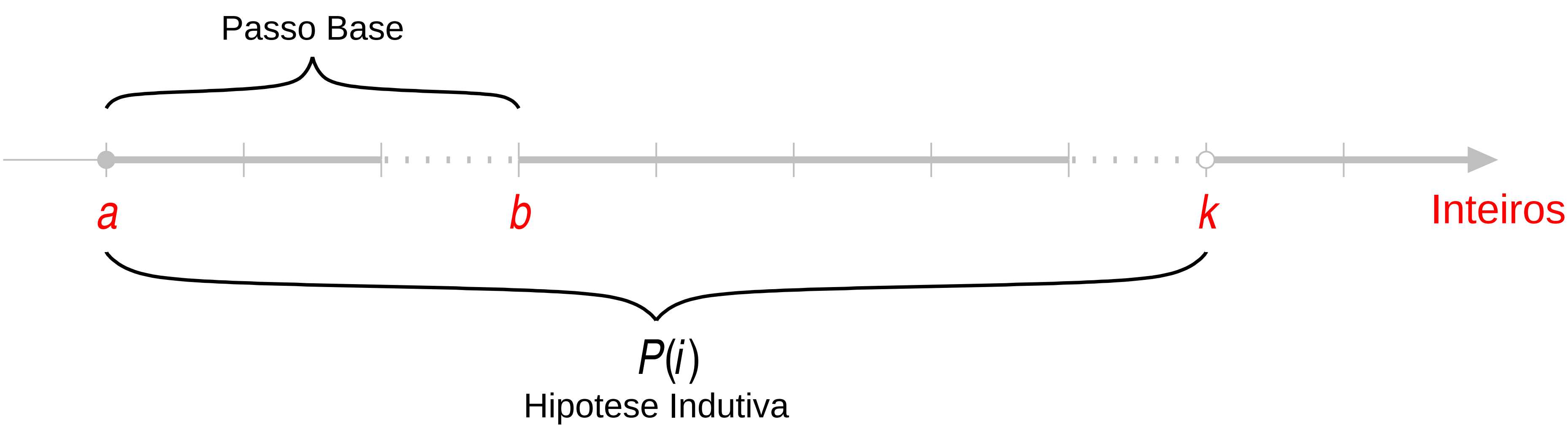


Princípio da indução matemática (forte)

Seja $P(n)$ um predicado que é definido para inteiros n, e seja a e b inteiros fixos, sendo $a \leq b$. Suponha que as duas afirmações seguintes sejam verdadeiras:

1. $P(a), P(a+1), \ldots, P(b)$ são V. (Passo base)

2. Para qualquer inteiro $k \geq b$,
   se $P(i)$ é V para $a \leq i < k$ então $P(k)$ é V, i.e., $P(i) \rightarrow P(k)$.
   ➜ Logo, a afirmação "para todos inteiros $n \geq a$, $P(n)$" é V. (A suposição que $P(i)$ é V para $a \leq i < k$ é chamada de hipótese indutiva.)



Princípio da indução matemática (forte) Exemplo 11

Prove que qualquer inteiro maior que 1 é divisível por um número primo.

Prova (por indução matemática):

1. Passo base: Para $n = 2$ a propriedade é válida já que $2|2$.

2. Passo indutivo: Vamos supor que para todos inteiros i, $2 \leq i < k$, i é divisível por um número primo. [hipótese indutiva]

   Se a propriedade é válida para $2 \leq i < k$, então é válida para k, ou seja, k é divisível por um número primo [o que deve ser mostrado].
   Seja k um inteiro, $k > 2$. Ou k é primo ou k não é primo. Se k é primo, então k é divisível por um primo (ele próprio). Se k não é primo então $k = u \cdot v$, onde u e v são inteiros tais que $2 \leq u < k$ e $2 \leq v < k$. Pela hipótese indutiva, u é divisível por um número primo p e pela transitividade da divisibilidade k também é divisível por p. Assim, independente se k é primo ou não, k é divisível por um primo.

Princípio da indução matemática (forte): Exemplo 12

Seja a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 2 \\ a_k &= 3 \cdot a_{\lfloor k/2 \rfloor} + 2, \;\; k \geq 3 \end{aligned}$$

Prove que a_n é par, para $n \geq 1$.

Prova (por indução matemática):

1. Passo base: Para $n = 1$ e $n = 2$ a propriedade é válida já que $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$.
2. Passo indutivo: Vamos supor que a_i é par para todos inteiros i, $1 \leq i < k$. [hipótese indutiva]

Princípio da indução matemática (forte): Exemplo 12

Se a propriedade é válida para $1 \leq i < k$, então é válida para k, ou seja, a_k é par [o que deve ser mostrado].

Pela definição de $a_1, a_2, a_3, \ldots$

$$a_k = 3 \cdot a_{\lfloor k/2 \rfloor} + 2, \;\; k \geq 3$$

O termo $a_{\lfloor k/2 \rfloor}$ é par pela hipótese indutiva já que $k \geq 3$ e $1 \leq \lfloor k/2 \rfloor < k$. Desta forma, $3 \cdot a_{\lfloor k/2 \rfloor}$ é par e $3 \cdot a_{\lfloor k/2 \rfloor} + 2$ também é par, o que mostra que a_k é par.

Princípio da ordenação dos inteiros

- Princípio: Seja S um conjunto de um ou mais números inteiros que são maiores que um dado inteiro fixo. Então S tem um elemento que é menor de todos.
  - Também chamado “Principio da Boa Ordenação”.
  - De outro modo: considere qualquer subconjunto A de inteiros positivos que seja nao vazio. Então A possui um menor elemento.
  - Não vamos provar este principio, apenas aceitá-lo.

- O princípio da ordenação dos inteiros, da indução matemática fraca e forte são equivalentes.
  - Usando-se o princípio da boa ordenação dos inteiros podemos demonstrar que a indução matemática fraca e a indução matemática forte são equivalentes.