Lógica de Proposições Quantificadas

Cálculo de Predicados

Antonio Alfredo Ferreira Loureiro

loureiro@dcc.ufmg.br

http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Introdução

- Já estudamos análise de proposições compostas, i.e., proposições simples ligadas por conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

- Este tipo de análise não é suficiente para determinar a validade da maioria das situações matemáticas e do dia-a-dia.

  Todos seres humanos são mortais;

  Sócrates é um ser humano;

  $\therefore$ Sócrates é mortal.

  ➜ Argumento intuitivamente correto.

  – Validade não pode ser obtida usando os métodos já vistos.
  – Validade é determinada separando as proposições em partes.
  – Vocábulos que denotam quantidades (TODOS e ALGUNS) têm uma função especial na análise.

- Cálculo de predicados: área que trata da análise simbólica de predicados e proposições quantificadas.

- Cálculo de proposições ou cálculo proposicional: área que trata da análise de proposições compostas.

Predicados e proposições quantificadas

- Predicado [gramática]: parte da sentença que fornece informação sobre o sujeito.

- Predicado [lógica]: pode ser obtido removendo substantivos de uma proposição.
  Sejam os seguintes predicados:
  - P: "é um estudante na UFMG"
  - Q: "é um estudante no(a)"

    P e Q são símbolos de predicados.

  que podem ser reescritos com variáveis:
  - $P(x)$: "x é um estudante na UFMG"
  - $Q(x, y)$: "x é um estudante no(a) y"

    x e y são variáveis dos predicados.

Predicados e proposições quantificadas

- Definição: Um **predicado** é uma sentença que contém um número finito de variáveis e se torna uma proposição quando as variáveis são substituídas por valores específicos.

- Os valores das variáveis de predicados são definidos por conjuntos chamados domínios. Por exemplo, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.
  Nota: O uso da letra $\mathbb{Z}$ vem do alemão *zahl*, que significa número.

Predicados e proposições quantificadas

- Definição: Se $P(x)$ é um predicado e x tem domínio D, o conjunto verdade de $P(x)$ é o conjunto de todos elementos de D que fazem $P(x)$ verdadeiro quando substituído por x. O conjunto verdade de $P(x)$ é denotado por

$$\{x \in D \mid P(x)\}$$

- $\boxed{\text{Exemplo 1:}}$
  – $P(x)$: "x é um fator de 8" e o domínio de x é o conjunto de todos os inteiros positivos.
  O conjunto verdade de $P(x)$ é $\{1, 2, 4, 8\}$.

Predicados e proposições quantificadas

- Notação: Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ predicados e suponha que o domínio comum de x é D.

- A notação
$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$
significa que cada elemento no conjunto verdade de $P(x)$ está no conjunto verdade de $Q(x)$.

- A notação
$$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$
significa que $P(x)$ e $Q(x)$ têm conjuntos verdade idênticos.

Predicados e proposições quantificadas

- $\boxed{\text{Exemplo 2:}}$
  $P(x)$: x é um fator de 8;
  $Q(x)$: x é um fator de 4;
  $R(x)$: $x < 5$ e $x \neq 3$, e
  o domínio de x é $\mathbb{Z}^+$ (inteiros positivos).

- Que relações podem ser expressas entre os três predicados?
  - O conjunto verdade de $P(x)$ é $\{1, 2, 4, 8\}$;
  - O conjunto verdade de $Q(x)$ é $\{1, 2, 4\}$;
  - O conjunto verdade de $R(x)$ é $\{1, 2, 4\}$;

  $\therefore Q(x) \Rightarrow P(x)$;
  $\therefore R(x) \Rightarrow P(x)$;
  $\therefore Q(x) \Leftrightarrow R(x)$;

Quantificadores: $\forall$ e $\exists$

- Como transformar predicados em proposições?
  - Atribuir valores específicos para todas variáveis.
  - Usar quantificadores.

- Definição: Quantificadores são palavras/expressões que referem a quantidades tais como "todos" e "alguns" e indicam para quantos elementos do domínio um dado predicado é verdadeiro.

Quantificadores: $\forall$ e $\exists$

- $\forall$: denota "para todos" e é chamado de quantificador universal.
  - $\boxed{\text{Exemplo 3:}}$

$$\forall \text{ seres humanos } x,\ x \text{ é mortal.}$$

$$\forall x \in S,\ x \text{ é mortal}$$

onde S é o conjunto de todos seres humanos.

- $\exists$: denota "existe" e é chamado de quantificador existencial.
  - $\boxed{\text{Exemplo 4:}}$

$$\exists \text{ uma pessoa } s \mid s \text{ é um estudante de AEDS I.}$$

$$\exists s \in S \mid s \text{ é um estudante de AEDS I.}$$

onde S é o conjunto de todas as pessoas.

Proposição universal

- Definição: Seja $Q(x)$ um predicado e D o domínio de x. Uma **proposição universal** é uma proposição da forma "$\forall x \in D, Q(x)$."
  - A proposição universal é verdadeira sse $Q(x)$ é verdadeiro para todo x em D.
  - A proposição universal é falsa sse $Q(x)$ é falso para pelo menos um x em D.
    - ➜ O valor de x para o qual $Q(x)$ é falso é chamado de **contra-exemplo** para a proposição universal.

Proposição universal

- Verifique se a proposição universal é verdadeira ou falsa:

  (a) Seja $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e a proposição $\forall x \in D, x^2 \geq x$.

  $$1^2 \geq 1,\ \ 2^2 \geq 2,\ \ 3^2 \geq 3,\ \ 4^2 \geq 4,\ \ 5^2 \geq 5$$

  $\therefore$ a proposição $\forall x \in D, x^2 \geq x$ é verdadeira.

  ➜ Método da exaustão.

  (b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$.

  $$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \not\geq \frac{1}{2}$$

  $\therefore$ a proposição é falsa.

Proposição existencial

- Definição: Seja $Q(x)$ um predicado e D o domínio de x. Uma **proposição existencial** é uma proposição da forma "$\exists x \in D \mid Q(x)$."
  - A proposição existencial é verdadeira sse $Q(x)$ é verdadeiro para pelo menos um x em D.
  - A proposição existencial é falsa sse $Q(x)$ é falso para todo x em D.

- Verifique se a proposição existencial é verdadeira ou falsa:

  (a) $\exists m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = m$.

  $1^2 = 1$.

  $\therefore$ $m^2 = m$ para pelo menos um inteiro m; logo, a proposição $\exists m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = m$ é verdadeira.

  (b) Seja $E = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e a proposição $\exists m \in E \mid m^2 = m$.

  $$5^2 = 25 \neq 5 \quad 6^2 = 36 \neq 6 \quad 7^2 = 49 \neq 7$$

  $$8^2 = 64 \neq 8 \quad 9^2 = 81 \neq 9 \quad 10^2 = 100 \neq 10$$

  $\therefore$ a proposição $\exists m \in E \mid m^2 = m$ é falsa.

Tradução de linguagem formal para informal e vice-versa

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
  - Todos números reais têm quadrados não-negativos.

- $\exists m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = m$.
  - Existe um número inteiro cujo quadrado é igual a ele mesmo.

- Todos os triângulos têm três lados.
  - $\forall$ triângulos t, t tem três lados.

- Alguns programas são estruturados.
  - $\exists$ programas p tal que p é estruturado.

Proposição condicional universal

- Considera-se que a forma de proposição mais importante em Matemática é a **proposição condicional universal**.

$$\forall x, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

- $\forall x \in \mathbb{R},$ se $x > 2$ então $x^2 > 4$.
  - Se um número real é maior que 2 então seu quadrado é maior que 4.

- Todos bytes têm oito bits.
  - $\forall x$, se x é um byte, então x tem oito bits.

- Definição de um argumento válido como uma proposição condicional universal.
  - $\forall$ todas combinações de valores verdade das variáveis de uma sentença **se** as premissas são todas verdadeiras **então** a conclusão também é verdadeira.

Formas equivalentes de proposições universal e lógica

- As proposições
  - $\forall$ números reais x, se x é um inteiro, então x é racional.
  - $\forall$ inteiros x, x é racional.

  significam a mesma coisa, que têm a seguinte tradução: “todos inteiros são racionais.”
  - $\forall x \in U$, se $P(x)$ então $Q(x) \equiv \forall x \in D, Q(x)$.

- Se restringirmos o domínio U ao domínio D temos a seguinte equivalência.

  - $\forall x \in D, Q(x) \equiv \forall\ x$, se x está em D então $Q(x)$

- $\boxed{\text{Exemplo 5:}}$
  - $\forall$ polígonos p, se p é um quadrado, então p é um retângulo $\equiv$
    $\forall$ quadrados p, p é um retângulo.
  - $\exists\ x \in U$ tal que $P(x)$ e $Q(x) \equiv$
    $\exists\ x \in D$ tal que $Q(x)$
    Neste caso, D consiste de todos elementos de U que fazem $P(x)$ verdadeiro.

Negações de proposições quantificadas

- $\boxed{\text{Exemplo 6:}}$

  P: Todos matemáticos usam óculos.

  $\neg P$: Nenhum matemático usa óculos. (ERRADO)

  ➜ Um ou mais matemáticos não usam óculos. (ou)
  Alguns matemáticos não usam óculos.

- **Teorema**:
  A negação de uma proposição da forma

  $$\forall x \in D, Q(x)$$

  é equivalente logicamente a proposição da forma

  $$\exists x \in D \mid \neg Q(x)$$

  Simbolicamente temos:

  $$\neg(\forall x \in D, Q(x)) \equiv \exists x \in D \mid \neg Q(x)$$

Negações de proposições quantificadas

- $\boxed{\text{Exemplo 7:}}$

  P: $\forall$ primos p, p é ímpar.

  $\neg P$: $\exists$ um primo $p \mid p$ não é ímpar.

- $\boxed{\text{Exemplo 8:}}$

  P: Todos os programas de computador são finitos.

  $\neg P$: Alguns programas de computador não são finitos.

- $\boxed{\text{Exemplo 9:}}$

  P: $\forall$ políticos x, x não é honesto.

  $\neg P$: Alguns políticos são honestos.

Negações de proposições existenciais

- $\boxed{\text{Exemplo 10:}}$

  P: Alguns peixes respiram ar.

  $\neg P$: Alguns peixes não respiram ar. (ERRADO)

  ➜ Nenhum peixe respira ar.

- **Teorema**:

  A negação de uma proposição da forma

  $$\exists x \in D \mid Q(x)$$

  é equivalente logicamente a proposição da forma

  $$\forall x \in D, \neg Q(x)$$

  Simbolicamente temos:

  $$\neg(\exists x \in D \mid Q(x)) \equiv \forall x \in D, \neg Q(x)$$

Negações de proposições existenciais

- $\boxed{\text{Exemplo 11:}}$

  P: $\exists$ um triângulo tal que a soma dos ângulos de T é igual a 200 graus.

  $\neg P$: $\forall$ triângulos T, a soma dos ângulos de T não é igual a 200 graus.

- $\boxed{\text{Exemplo 12:}}$

  P: Alguns hackers de computador têm mais de 40 anos.

  $\neg P$: Todos os hackers de computador têm 40 anos ou menos.

Negações de proposições condicionais universais

- Pela definição da negação de uma proposição universal, temos:

$$\neg(\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x \mid \neg(P(x) \rightarrow Q(x))$$

Sabe-se também que a negação de uma sentença condicional pode ser decomposta numa sentença conjuntiva:

$$\neg(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv P(x) \wedge \neg Q(x)$$

Fazendo a substituição temos:

$$\neg(\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x \mid (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

Negações de proposições condicionais universais

- $\boxed{\text{Exemplo 13:}}$

  P: $\forall$ pessoas p, se p é loura então p tem olhos azuis.

  $\neg P$: $\exists$ uma pessoa p tal que p é loura e p não tem olhos azuis.

- $\boxed{\text{Exemplo 14:}}$

  P: Se um programa de computador tem mais de 100.000 linhas então o programa contém um erro.

  $\neg P$: Existe pelo menos um programa de computador que tem mais de 100.000 linhas e o programa não contém um erro.

Verdade por “default” de proposições universais

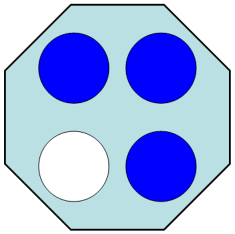
- Uma proposição da forma

$$\forall x \in D, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

é chamada de verdade por “default” sse $P(x)$ é falso para cada x em D.

Verdade por “default” de proposições universais

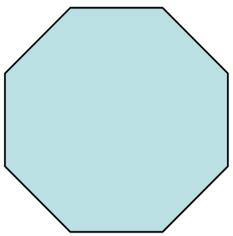
- $\boxed{\text{Exemplo 15:}}$ Sejam cinco bolas azuis, cinco brancas e um prato.



Cenário 1: três bolas azuis e uma branca são colocadas no prato.

– P: Todas as bolas no prato são azuis.

➜ P é falso, já que é possível identificar uma bola branca no prato.



Cenário 2: o prato está vazio.

– P: Todas as bolas no prato são azuis.

➜ P é verdadeiro ou falso?

A proposição é falsa sse sua negação for verdadeira. A negação é:

$\neg P$: Existe pelo menos uma bola no prato que não é azul.

➜ $\neg P$ só é verdadeiro se houver (existir) no prato uma bola que não seja azul. Como não existe, a negação é falsa e, assim, a proposição P é verdadeira por “default.”

Proposições contendo múltiplos quantificadores

- Reescreva as sentenças abaixo formalmente usando quantificadores e variáveis:
  (a) Todo mundo ama alguém.
  $\forall$ pessoas x, $\exists$ uma pessoa y tal que x ama y.
  (b) Alguém ama todo mundo.
  $\exists$ uma pessoa x tal que $\forall$ pessoas y, x ama y.

- As sentenças (a) e (b) são equivalentes logicamente?

$$\text{(a)} \stackrel{?}{\equiv} \text{(b)}$$

Não. Em geral, ao se trocar a ordem dos quantificadores na sentença o sentido muda.

Proposições contendo múltiplos quantificadores

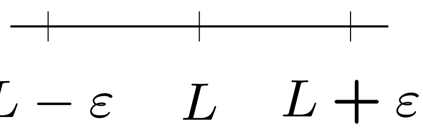
- Definição do limite de uma sequência a_n:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

sse os valores de a_n tornam-se “arbitrariamente” perto de L, i.e., convergem para L à medida que n cresce.

- $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists$ um número inteiro n_0 tal que $\forall$ inteiros n
  se $n > n_0$ então

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$



Negações de proposições quantificadas multiplamente

- $\boxed{\text{Exemplo 16:}}$ Qual é a negação da seguinte afirmação:

  P: $\forall$ pessoas x, $\exists$ uma pessoa y tal que x ama y.

  ➜ O que significa a sentença ser falsa?

  A propriedade não ser válida para todas as pessoas.

  $\neg P$: $\exists$ uma pessoa x tal que

  $\neg$($\exists$ uma pessoa y tal que x ama y) $\equiv$

  $\exists$ uma pessoa x tal que

  $\forall$ pessoas y, x não ama y

Negações de proposições quantificadas multiplamente

- Regra geral:

  P: $\forall\, x$, $\exists\, y$ tal que $C(x, y)$.

  $\neg P$: $\exists\, x$ tal que $\forall\, y$, $\neg C(x, y)$.

- $\boxed{\text{Exemplo 17:}}$

  P: $\forall$ inteiros n,
  $\exists$ um inteiro k tal que $n = 2k$.

  $\neg P$: $\exists$ um inteiro n tal que
  $\forall$ inteiro k, $n \neq 2k$.

Negações de proposições quantificadas multiplamente

- Regra geral:

  P: $\exists\, x$ tal que $\forall\, y$, $C(x, y)$.

  $\neg P$: $\forall\, x$, $\exists\, y$ tal que $\neg C(x, y)$.

- Exemplo 18:

  P: $\exists$ uma pessoa x tal que
  $\forall$ pessoas y, x ama y.

  $\neg P$: $\forall$ pessoas x,
  $\exists$ uma pessoa y tal que x não ama y.

- Sumário:

Quantificador	Negação
$\forall$	$\exists$
$\exists$	$\forall$

➜ Análogo a "De Morgan."

A relação entre $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$

- Seja o predicado $Q(x)$,
  onde x tem domínio $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Proposição universal é uma generalização da conjunção ($\wedge$):

$$\forall\, x \in D, Q(x) \equiv Q(x_1) \wedge Q(x_2) \wedge \ldots \wedge Q(x_n)$$

  – $\boxed{\text{Exemplo 19:}}$ $Q(x) : x \cdot x, D = \{0, 1\}$
    $\forall\, x \in D, Q(x) \equiv Q(0) \wedge Q(1)$

- Proposição existencial é uma generalização da disjunção ($\vee$):

$$\exists\, x \in D \text{ tal que } Q(x) \equiv Q(x_1) \vee Q(x_2) \vee \ldots \vee Q(x_n)$$

  – $\boxed{\text{Exemplo 20:}}$ $Q(x) : x + x, D = \{0, 1\}$
    $\exists\, x \in D$ tal que $Q(x) \equiv Q(0) \vee Q(1)$

Variações de proposições condicionais universais

- Seja a proposição condicional universal (PCU):

$$\forall\ x \in D, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

$\boxed{\text{Exemplo 21:}}$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$, se $x > 2$ então $x^2 > 4$

- As seguintes proposições podem ser definidas:
  - Contrapositivo: $\forall\ x \in D$, se $\neg Q(x)$ então $\neg P(x) \equiv$ PCU

    $\boxed{\text{Exemplo 22:}}$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$, se $x^2 \leq 4$ então $x \leq 2$
  - Recíproca: $\forall\ x \in D$, se $Q(x)$ então $P(x) \not\equiv$ PCU

    $\boxed{\text{Exemplo 23:}}$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$, se $x^2 > 4$ então $x > 2$
  - Inverso: $\forall\ x \in D$, se $\neg P(x)$ então $\neg Q(x) \not\equiv$ PCU

    $\boxed{\text{Exemplo 24:}}$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$, se $x \leq 2$ então $x^2 \leq 4$

Condições suficiente e necessária

- $\forall\ x$, $R(x)$ é uma condição suficiente para $S(x) \equiv$
  $\forall\ x$, se $R(x)$ então $S(x)$.

  Exemplo 25:
  – Ser quadrado é uma condição suficiente para ser retangular.
  – $\forall\ x$, se x é quadrado então x é retangular.

- $\forall\ x$, $R(x)$ é uma condição necessária para $S(x) \equiv$
  $\forall\ x$, se $\neg R(x)$ então $\neg S(x) \equiv$
  $\forall\ x$, se $S(x)$ então $R(x)$.

  Exemplo 26:
  – Ter 35 anos é uma condição necessária para ser presidente do Brasil.
  – $\forall\ x$, se x não tem 35 anos então x não pode ser presidente do Brasil.
  – $\forall\ x$, se x é presidente do Brasil então x tem 35 anos.

Condição somente se

- $\forall\, x$, $R(x)$ somente se $S(x) \equiv$
  $\forall\, x$, se $\neg S(x)$ então $\neg R(x) \equiv$
  $\forall\, x$, se $R(x)$ então $S(x)$.

- Exemplo 27:
  - O produto de dois números é zero somente se um dos números é zero.
  - $\forall\, x$, se os dois números são diferentes de zero então o produto dos dois números é diferente de zero.
  - $\forall\, x$, se o produto de dois números é zero então um dos números é zero.

Argumentos com afirmações quantificadas

- Regra da "Instanciação Universal":
  Se uma propriedade é verdadeira para cada objeto no domínio
  Então a propriedade é verdadeira para um objeto em particular do domínio.
  ➜ A propriedade pode ser definida, por exemplo, em termos de uma fórmula matemática, definição ou teorema.

- Exemplo famoso de instanciação universal:
  Todos seres humanos são mortais;
  Sócrates é um ser humano;
  $\therefore$ Sócrates é mortal.

- Instanciação universal é **a** ferramenta fundamental do raciocínio dedutivo.

Modus Ponens Universal

- Regra de instanciação universal + modus ponens
  - Versão informal:

    Se x faz com que $P(x)$ seja verdadeiro
    então x faz com que $Q(x)$ seja verdadeiro.
    a faz com que $P(a)$ seja verdadeiro;
    $\therefore$ a faz com que $Q(a)$ seja verdadeiro;

  - Versão formal:

    $\forall\, x$, se $P(x)$ então $Q(x)$;
    $P(a)$ para a em particular;
    $\therefore$ $Q(a)$.

- Silogismo: duas premissas (uma quantificada) e uma conclusão:
  - 1ª premissa é chamada de maior ('major')
  - 2ª premissa é chamada de menor ('minor')

Modus Ponens Universal

- $\boxed{\text{Exemplo 28:}}$

  Se um [número é par]$_{=E(x)}$
  então [seu quadrado é par]$_{=S(x)}$;
  k é um número que é par;
  $\therefore$ k^2 é par.

- Reescrevendo com quantificadores, variáveis e predicados:

  $\forall\ x$, se $E(x)$ então $S(x)$;
  $E(k)$ para k em particular;
  $\therefore$ $S(k)$.

Modus Tollens Universal

- Regra de instanciação universal + modus tollens
  - Versão informal:

    Se x faz com que $P(x)$ seja verdadeiro
    então x faz com que $Q(x)$ seja verdadeiro.
    a não faz com que $Q(a)$ seja verdadeiro;
    $\therefore$ a não faz com que $P(a)$ seja verdadeiro;

  - Versão formal:

    $\forall\, x$, se $P(x)$ então $Q(x)$;
    $\neg Q(a)$ para a em particular;
    $\therefore$ $\neg P(a)$.

Modus Tollens Universal

- $\boxed{\text{Exemplo 29:}}$

  Todos seres humanos são mortais;

  Zeus não é mortal;

  $\therefore$ Zeus não é humano.

  Reescrevendo com quantificadores, variáveis e predicados e supondo:

  $H(x)$: x é humano, e $M(x)$: x é mortal.

  $\forall\ x$, se $H(x)$ então $M(x)$;

  $\neg M(z)$ para z em particular;

  $\therefore$ $\neg H(z)$ para z em particular.

Provando validade de argumentos com proposições quantificadas

- Definição (forma de um argumento): A forma de um argumento é válida quando os símbolos dos predicados nas premissas forem substituídos por quaisquer predicados em particular, se as premissas resultantes forem verdadeiras então a conclusão também é verdadeira.
  ➜ Um argumento é válido sse sua forma é válida.

- Prova de validade da regra do Modus Ponens Universal:

  $\forall\, x$, se $P(x)$ então $Q(x)$;
  $P(a)$ para a em particular;
  $\therefore\ Q(a)$.

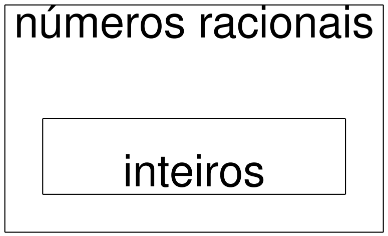
  – Suponha que as premissas maior e menor são V.
  – Mostre que $Q(a)$ é V (o que deve ser provado).
  – Pela premissa menor P(a) é V.
  – Pela premissa maior e a regra de instanciação universal a afirmação "se $P(a)$ então $Q(a)$" é V para o valor de a em particular.
  – Se as proposições $P(a) \rightarrow Q(a)$ e $P(a)$ são V, então por modus ponens a proposição $Q(a)$ também é V (o que devia ser provado).

Usando diagramas para mostrar a validade de proposições

- Idéia:
  - Represente a validade das premissas com diagramas.
  - Analise os diagramas para saber se eles representam também a verdade da conclusão.

- Exemplo 30:

P: $\forall$ inteiros n, n é um número racional.



$\therefore$ A forma do argumento é válida.

Usando diagramas para mostrar a validade de proposições

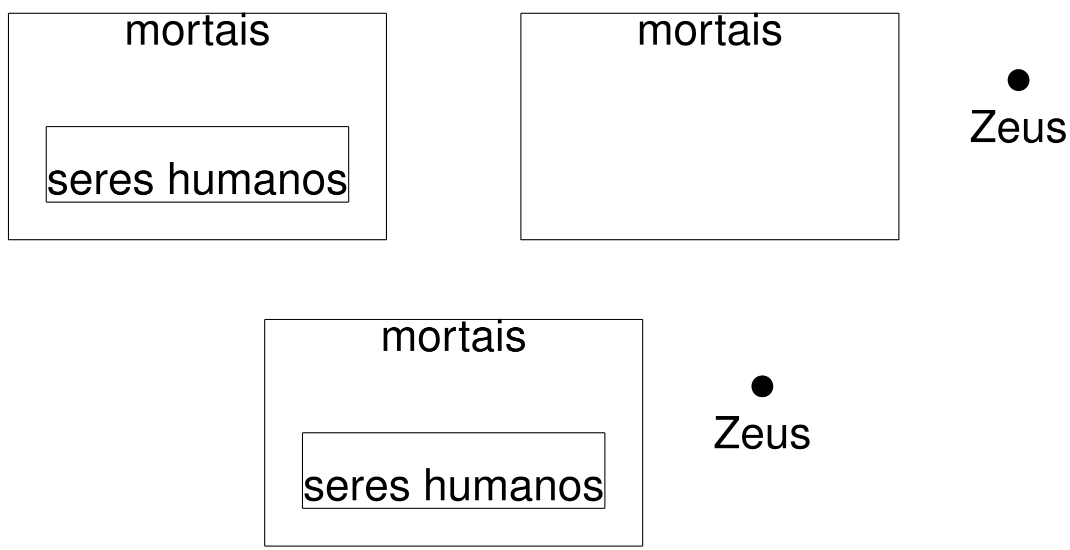
- Exemplo 31:

  Todos seres humanos são mortais;

  Zeus não é mortal;

  ∴ Zeus não é humano.

Premissa Maior *Premissa Menor*



∴ A forma do argumento é válida.

Usando diagramas para mostrar a validade de proposições

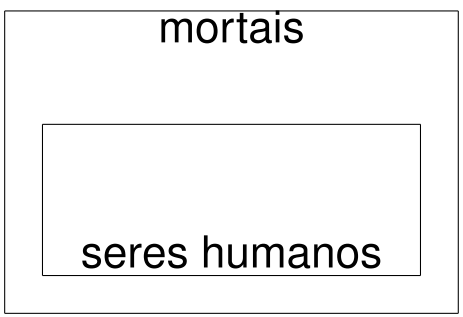
- Exemplo 32:

  Todos seres humanos são mortais;

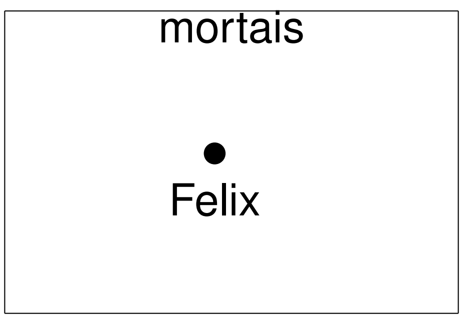
  Felix é mortal;

  $\therefore$ Felix é um ser humano.

Premissa Maior

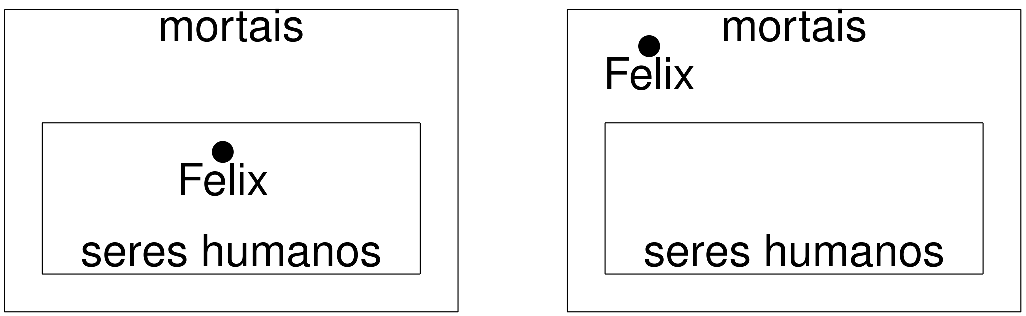


Premissa Menor



Usando diagramas para mostrar a validade de proposições

Possíveis situações



∴ A forma do argumento é inválida.

Argumentos com proposições quantificadas: Formas inválidas

- Erro oposto:
  - Versão informal:

$$\begin{array}{ll} & \text{Se } x \text{ faz com que } P(x) \text{ seja verdadeiro} \\ & \text{então } x \text{ faz com que } Q(x) \text{ seja verdadeiro;} \\ & a \text{ faz com que } Q(a) \text{ seja verdadeiro;} \\ \therefore & a \text{ faz com que } P(a) \text{ seja verdadeiro.} \end{array}$$

  - Versão formal:

$$\begin{array}{ll} & \forall\, x, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x); \\ & Q(a) \text{ para } a \text{ em particular;} \\ \therefore & P(a). \end{array}$$

Argumentos com proposições quantificadas: Formas inválidas

- Erro inverso:
  - Versão informal:

$$\begin{array}{ll} & \text{Se } x \text{ faz com que } P(x) \text{ seja verdadeiro} \\ & \text{então } x \text{ faz com que } Q(x) \text{ seja verdadeiro;} \\ & a \text{ não faz com que } P(a) \text{ seja verdadeiro;} \\ \therefore & a \text{ não faz com que } Q(a) \text{ seja verdadeiro.} \end{array}$$

  - Versão formal:

$$\begin{array}{ll} & \forall\, x, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x); \\ & \neg P(a) \text{ para } a \text{ em particular;} \\ \therefore & \neg Q(a). \end{array}$$

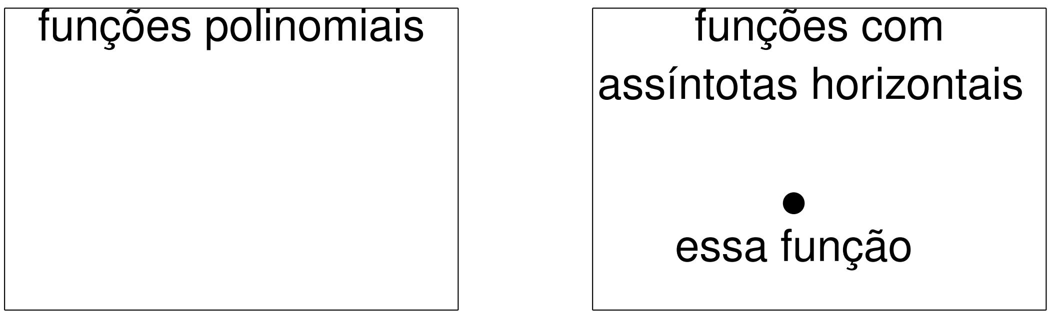
Argumentos com proposições quantificadas: Argumentos com nenhum(a)/não

- Testando a validade de um argumento com diagramas:

  Nenhuma função polinomial tem assíntota horizontal;

  Essa função tem assíntota horizontal;

  $\therefore$ Essa função não é polinomial.



$\therefore$ A forma do argumento é válida.

Argumentos com proposições quantificadas: Argumentos com nenhum(a)/não

- Outra alternativa:

  $P(x)$: x é uma função polinomial.

  $Q(x)$: x não tem assíntota horizontal.

$$\begin{array}{ll} & \forall\, x, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x); \\ & \neg Q(a) \text{ para } a \text{ em particular}; \\ \therefore & \neg P(a). \end{array}$$

Comentários sobre erros oposto e inverso

- Erro comum porque as pessoas assumem a premissa maior como bicondicional ao invés de uma sentença condicional simples.

- Variação do erro oposto pode ser uma ferramenta útil se usada com critério.

  $\forall\, x$, se $P(x)$ então $Q(x)$; (V)
  $Q(a)$; (V) para a em particular
  Verifique se $P(a)$ também é V.

- Exemplo 33:
  $\forall\, x$, se x tem pneumonia
  então [x tem febre e calafrios, tosse forte e sente cansado].

  – Se o médico sabe sobre [. . .] então existe uma forte possibilidade (mas não certeza) que a pessoa tem pneumonia.
  – Forma de raciocínio chamada de abdução ('abduction') em IA e é muito usada em sistemas especialistas.