# Análise Combinatória

Antonio Alfredo Ferreira Loureiro

loureiro@dcc.ufmg.br

http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

# Introdução

- Ramo da matemática que trata da contagem.
- Em geral, a dificuldade não está em como contar mas o que contar.
- Em Ciência da Computação, questões de contagem são importantes já que temos uma quantidade finita de recursos.
- Exemplos:
  - Qual a quantidade de memória que será utilizada por um determinado programa que faz alocação dinâmica de memória?
  - Quantos usuários um determinado sistema computacional tem capacidade de atender?
  - Quantas computações um determinado algoritmo executa? (Qual é o custo computacional em termos de *tempo* e espaço de um determinado algoritmo?)
- Além disso, contagem é a base de probabilidade e estatística.
- Contagem é baseada em dois princípios:
  - Princípio da Multiplicação
  - Princípio da Adição

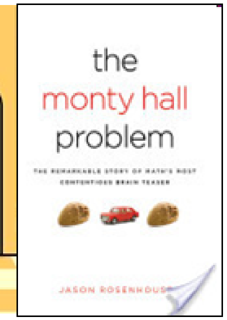
# Três portas, um prêmio; Você escolhe e troca? ou o *Monty Hall Problem*

In the September 9, 1990 issue of Parade magazine, the columnist Marilyn vos Savant responded to this letter:

> *Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors. Behind one door is a car, behind the others, goats. You pick a door, say number 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say number 3, which has a goat. He says to you, "Do you want to pick door number 2?" Is it to your advantage to switch your choice of doors?*
> — Craig F. Whitaker, Columbia, MD

The letter roughly describes a situation faced by contestants on the 1970's game show *Let's Make a Deal*, hosted by Monty Hall and Carol Merrill. Marilyn replied that the contestant should indeed switch. But she soon received a torrent of letters – many from mathematicians – telling her that she was wrong. The problem generated thousands of hours of heated debate.

Was Marilyn right?



# Três portas, um prêmio; Você escolhe uma porta e depois troca?

> Suponha que você esteja em um programa de televisão no qual você pode ganhar um prêmio. Existem três portas (identificadas como $A$, $B$ e $C$) e atrás de uma delas está o prêmio e nas outras duas não há nada. Você escolhe uma porta e o anfitrião, que sabe onde está o prêmio, abre uma outra porta vazia. Ele lhe pergunta: "Você deseja mudar de porta?" O que você faz e por que?

➜ Problema que envolve probabilidade e, consequentemente, contagem!

Qualquer problema de probabilidade envolve algum tipo de experimento, processo ou jogo aleatório (randômico).

Cada problema possui dois desafios distintos:

1. Como modelar o problema matematicamente?
2. Como resolver o problema matemático resultante?

Estratégia a ser usada:

➜ Resolver o problema em quatro passos.

# Os quatro passos

1. Determine o espaço de amostragem.

2. Defina o evento de interesse.

3. Determine as probabilidades dos resultados.

4. Determine a probabilidade do evento.

# Suposições para resolver o problema

1. O prêmio é igualmente provável de estar em cada uma das três portas.
2. O jogador é igualmente provável de escolher uma das três portas.
3. Depois que o jogador escolhe uma porta, o anfitrião deve abrir uma outra porta vazia e lhe perguntar se deseja trocar ou não de porta.
4. O anfitrião tem a escolha de qual porta abrir e, assim, ele é igualmente provável de escolher uma porta dentre as restantes.

# Passo 1: Determine o espaço de amostragem

O primeiro objetivo é encontrar todas as possibilidades de um experimento, ou seja, tudo que deve ser contado.

Um experimento típico envolve diferentes quantidades aleatórias.

No caso deste problema, temos:

1. A porta na qual está o prêmio;
2. A porta escolhida inicialmente pelo jogador;
3. A porta vazia escolhida pelo apresentador;

Cada possível combinação destas quantidades aleatórias é chamada de resultado (*outcome*).

O conjunto de todas resultados é o espaço de amostragem do experimento.

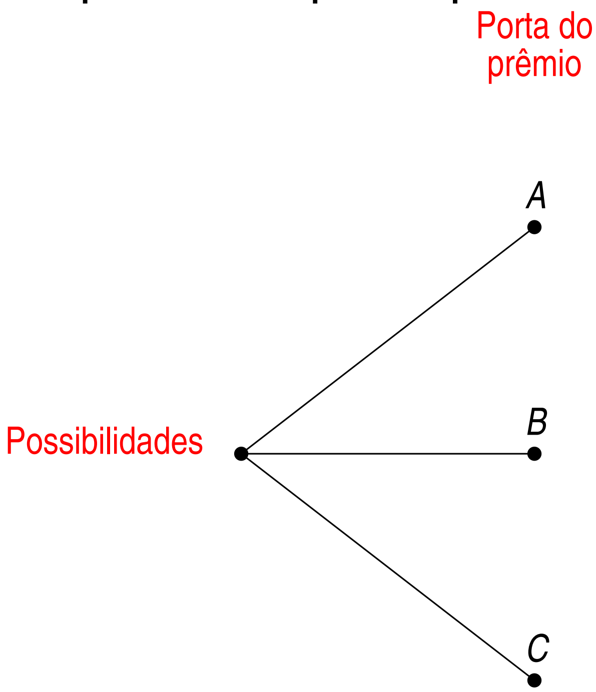
A questão seguinte é: como representar essas possibilidades?
➜ Árvore de possibilidades.

# Árvore de possibilidades e Passo 1

Árvore de possibilidades:

– Ferramenta gráfica, que pode ser usada nas quatro etapas.
– Apropriada quando o número de resultados não é muito grande ou o problema é bem estruturado.
– Ajuda a compreender o espaço de amostragem de um experimento.

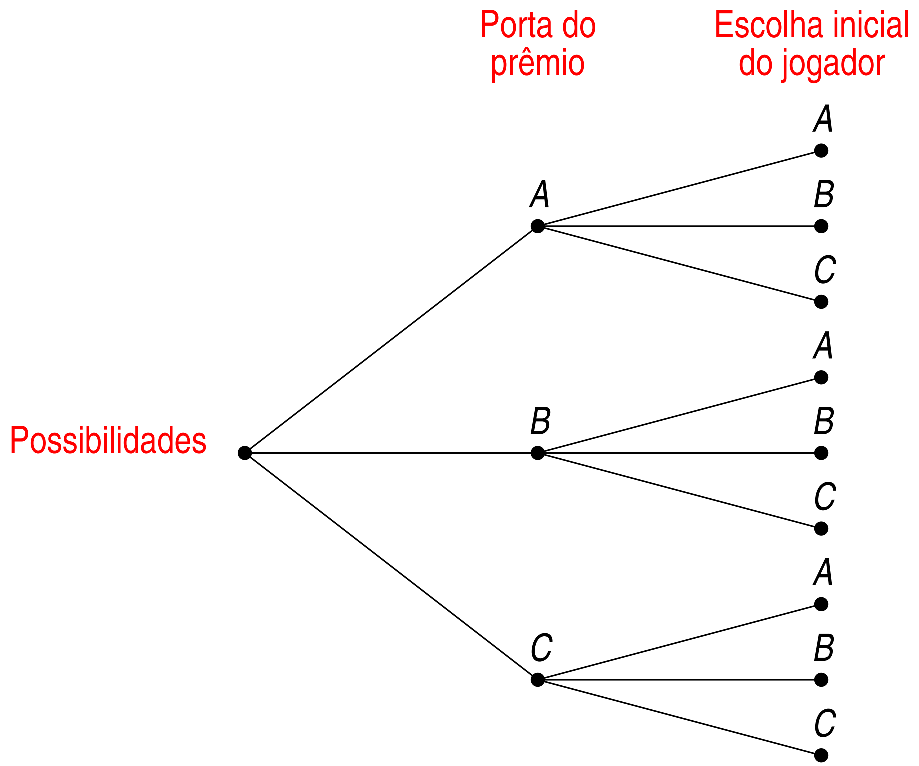
Primeira quantidade aleatória: porta na qual o prêmio está.



# Árvore de possibilidades e Passo 1

Segunda quantidade aleatória:
– porta escolhida inicialmente pelo jogador.

Para cada porta possível onde está o prêmio, o jogador pode escolher inicialmente qualquer uma das três portas. Isso é representado acrescentando uma segunda “ramificação” à árvore.



# Árvore de possibilidades e Passo 1

Terceira quantidade aleatória:

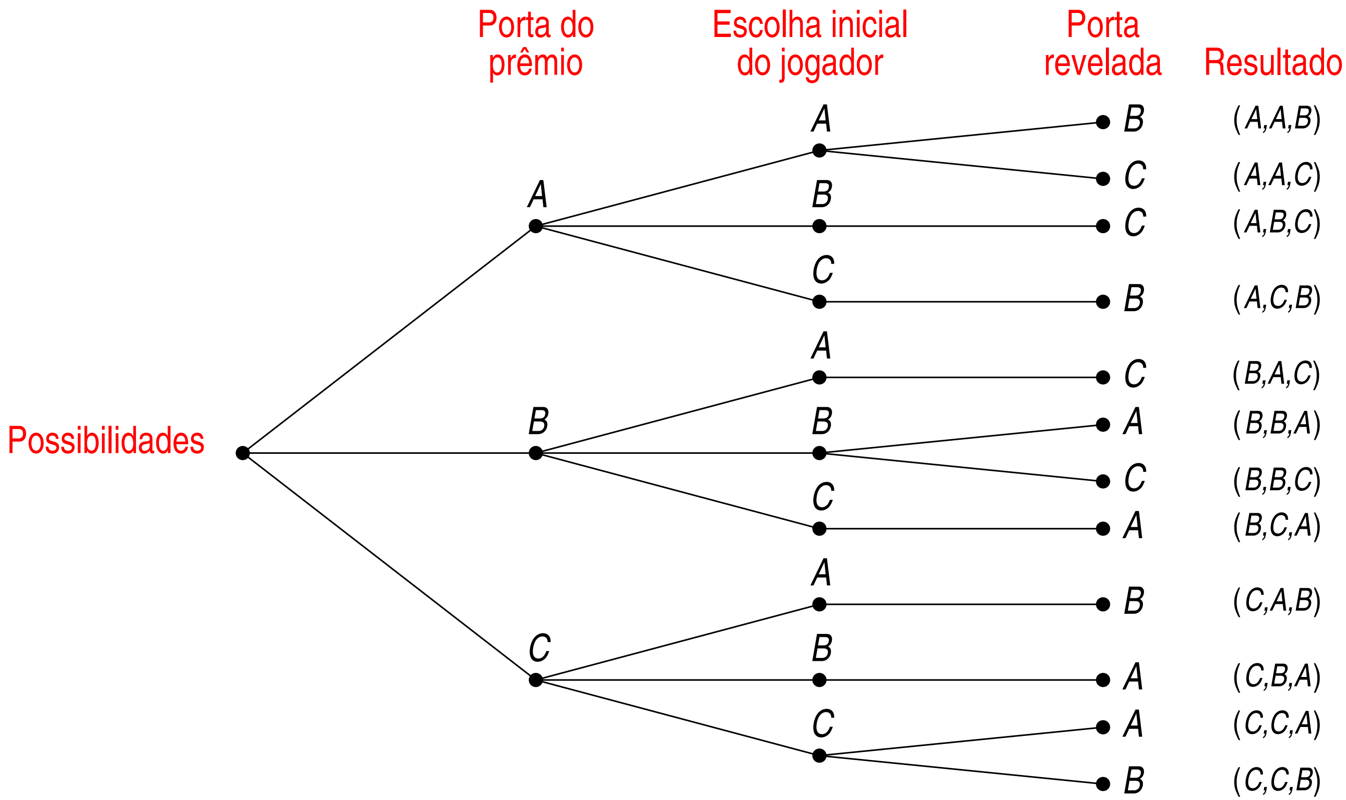
– porta vazia escolhida pelo apresentador.

Finalmente, o anfitrião abre uma porta vazia.

Dependendo da escolha do jogador e da porta do prêmio, o anfitrião tem uma ou duas escolhas.

Todas essas possibilidades são apresentadas em uma terceira ramificação da árvore.

# Árvore de possibilidades e Passo 1



# Árvore de possibilidades e Passo 1

Veja que existe uma relação entre a árvore de possibilidades e o que foi dito anteriormente:

– Cada folha da árvore representa um resultado do experimento.
– O conjunto de todas as folhas representa o espaço de amostragem.

Neste problema, o espaço de amostragem contém 12 resultados (folhas).

Para facilitar, cada folha foi identificada por uma tripla de portas que indica (porta onde está o prêmio, porta escolhida inicialmente pelo jogador, porta revelada pelo anfitrião).

Desta forma, o espaço de amostragem $S$ é representado por:

$$S = \left\{ \begin{array}{cccccc} (A,A,B), & (A,A,C), & (A,B,C), & (A,C,B), & (B,A,C), & (B,B,A), \\ (B,B,C), & (B,C,A), & (C,A,B), & (C,B,A), & (C,C,A), & (C,C,B) \end{array} \right\}$$

O diagrama tem uma interpretação mais ampla ainda: cada experimento pode ser considerado um caminho entre a raiz da árvore e uma folha, onde o caminho tomado em cada passo é determinado randomicamente.

# Passo 2: Defina os eventos de interesse

Nosso objetivo é responder a perguntas do tipo:

"Qual é a probabilidade de . . . ?",

onde . . . representa alguma frase como:

– "o jogador ganhar o prêmio se ele mudar a porta escolhida inicialmente",
– "o jogador escolher inicialmente a porta do prêmio", ou
– "o prêmio estar na porta $C$".

Praticamente qualquer pergunta desse tipo pode ser modelada matematicamente como um evento, que é definido como um subconjunto do espaço de amostragem.

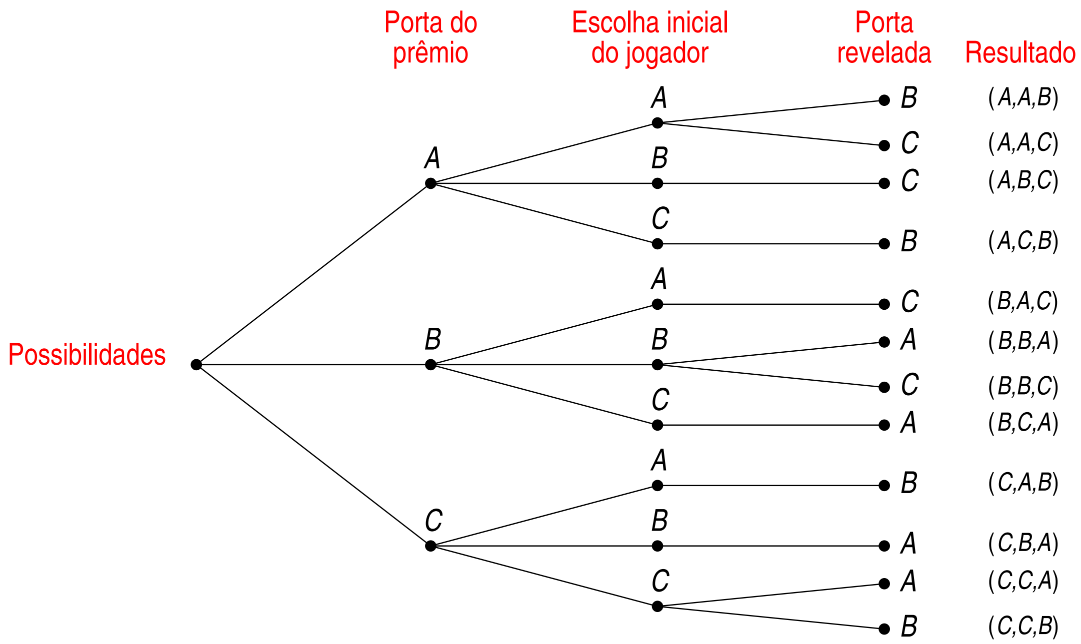
# Passo 2: Defina os eventos de interesse

Por exemplo, o evento que o prêmio está na porta $C$ é o conjunto de resultados:

$$\{(C, A, B), (C, B, A), (C, C, A), (C, C, B)\}$$

O evento que o jogador escolhe inicialmente a porta do prêmio é o conjunto de resultados:

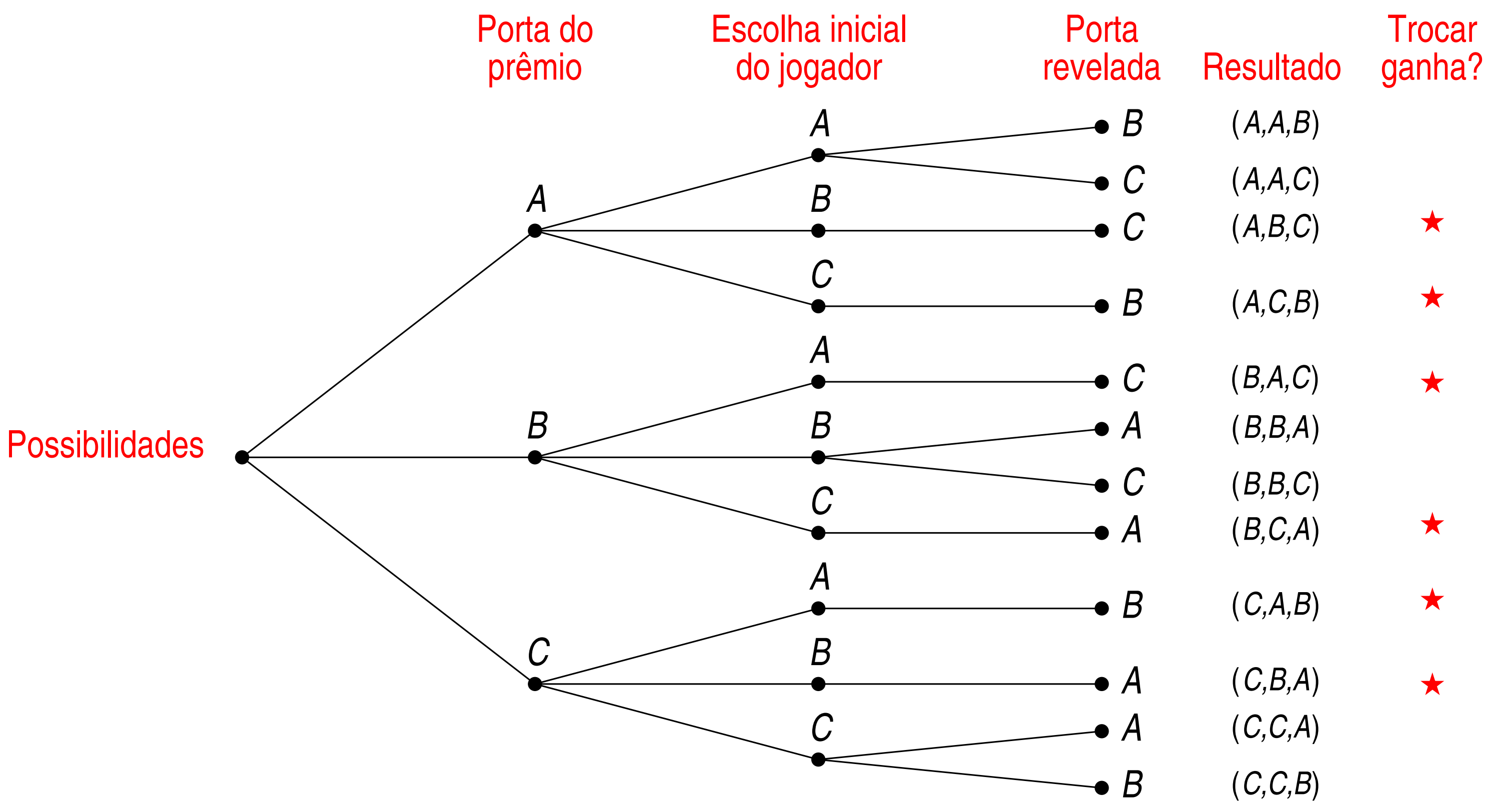
$$\{(A, A, B), (A, A, C), (B, B, A), (B, B, C), (C, C, A), (C, C, B)\}$$



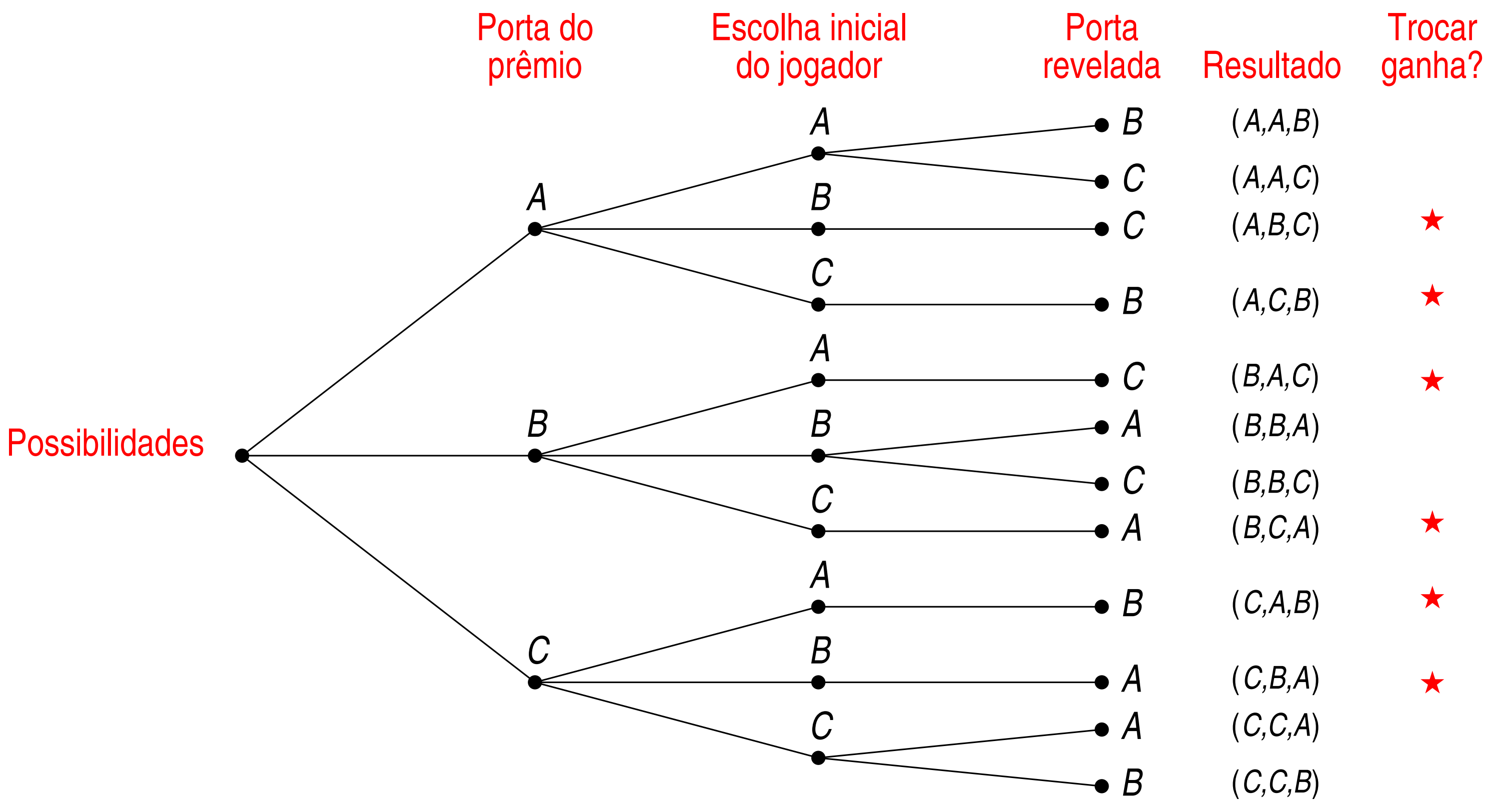
# Passo 2: Defina os eventos de interesse

Neste caso, estamos interessados no evento que o jogador ganha o prêmio se mudar a porta escolhida inicialmente, que tem como conjunto de resultados: $\{(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)\}$.

Os resultados que definem este evento estão marcados com o símbolo ★.



# Passo 2: Defina os eventos de interesse




Observe que exatamente metade dos resultados está marcado.
➜ O jogador ganha em metade dos resultados.

Podemos concluir que o jogador que troca a porta ganha o prêmio com probabilidade $\frac{1}{2}$?
➜ Não!
➜ Cada resultado não é igualmente provável!

# Passo 3: Determine as probabilidades dos resultados

Até agora temos todos os resultados do experimento.

Devemos determinar a probabilidade de cada resultado, que é um número real entre 0 and 1.

➜ A soma das probabilidades de todos os resultados deve ser 1.

As probabilidades dos resultados são determinadas pelo fenômeno que estamos modelando e não são quantidades que podem ser derivadas matematicamente.

No entanto, técnicas matemáticas podem nos ajudar a calcular a probabilidade de cada resultado baseado em decisões de modelagem.

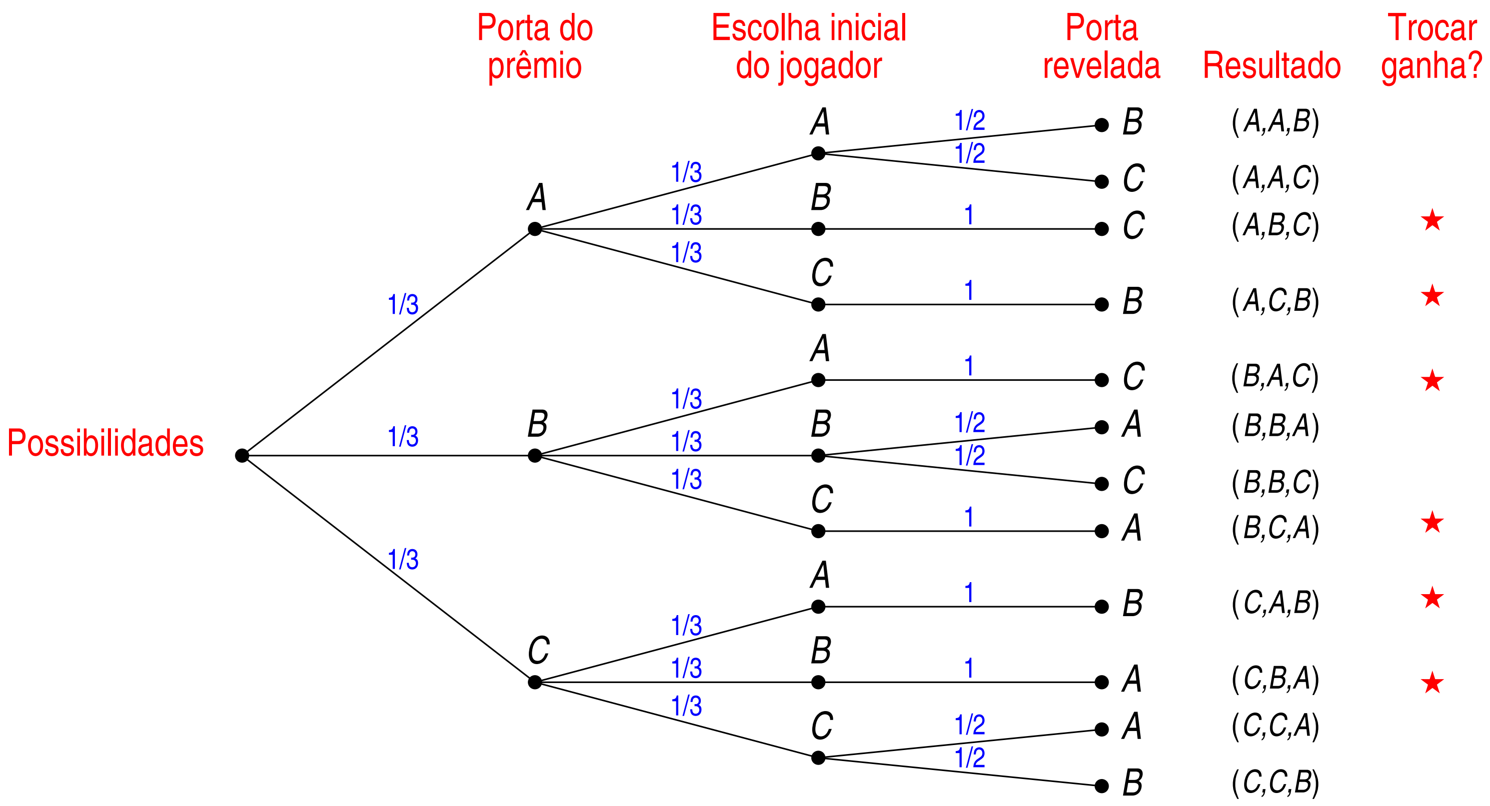
Vamos resolver este problema em dois estágios:

1. Cálculo da probabilidade de cada aresta do caminho, e
2. Cálculo da probabilidade de cada resultado.

# Cálculo da probabilidade de cada aresta do caminho

Deve-se atribuir uma probabilidade a cada aresta de acordo com as suposições feitas.

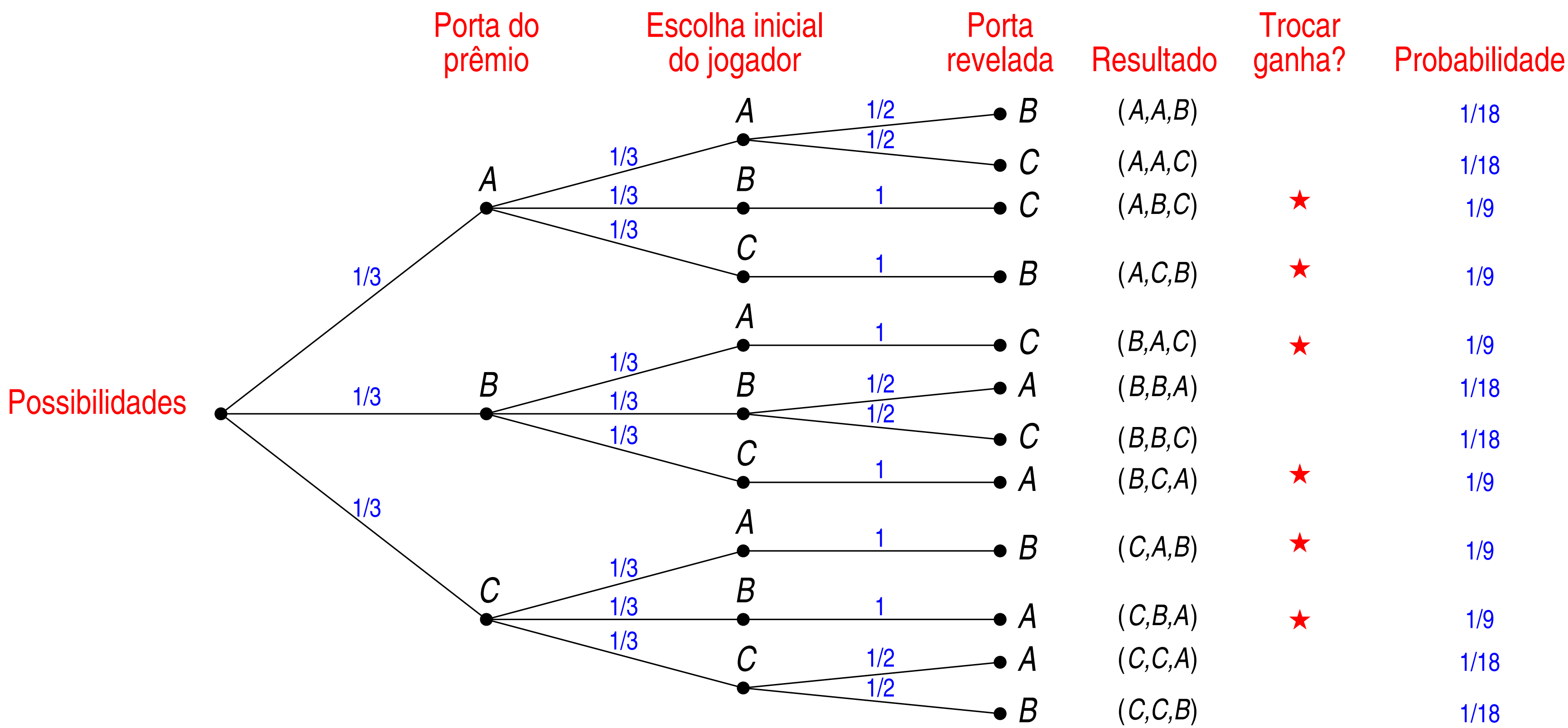
No caso de haver uma única opção, atribui-se a probabilidade 1.



# Cálculo da probabilidade de cada resultado

A probabilidade de cada resultado é o produto de cada probabilidade no caminho entre a raiz da árvore e o resultado.

Por exemplo, a probabilidade para o resultado $(A, A, B)$ é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$.



# Cálculo da probabilidade de cada resultado

Especificar a probabilidade de cada resultado significa definir um função que atribui a cada resultado uma probabilidade.

➜ Esta função é usualmente chamada de Pr.

Assim, neste problema temos:

$$\begin{aligned} \text{Pr}(A, A, B) &= \frac{1}{18} \\ \text{Pr}(A, A, C) &= \frac{1}{18} \\ \text{Pr}(A, B, C) &= \frac{1}{9} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Lembre-se que a soma de todas as probabilidades dos resultados dever ser 1, i.e.,

$$\sum_{x \in S} \text{Pr}(x) = 1.$$

# Cálculo da probabilidade de cada resultado

$$\left.\begin{array}{c}\text{Espaço de amostragem } S \\ + \\ \text{Função de probabilidade Pr: } S \rightarrow [0,1]\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Espaço de probabilidade}$$

Espaço de probabilidade:

– Descreve todos os possíveis resultados de um experimento e a probabilidade de cada um.

– Modelo matemático completo de um experimento.

# Passo 4: Determine a probabilidade do evento

A partir da probabilidade de cada resultado, desejamos calcular a probabilidade do evento ($E$) de interesse.

Probabilidade de um evento $E$:

– A soma das probabilidades dos resultados que o contém.
– A probabilidade de um evento $E \subseteq S$ é escrita como $\text{Pr}(E)$, que pode ser representada como:

$$\text{Pr}(E) = \sum_{x \in E} \text{Pr}(x)$$

Por exemplo, a probabilidade do evento $E$: "o jogador ganhar o prêmio caso ele mude a porta escolhida inicialmente" é:

$$\begin{aligned}
\text{Pr}(E) &= \text{Pr}(A, B, C) + \text{Pr}(A, C, B) + \text{Pr}(B, A, C) + \\
&\quad\ \text{Pr}(B, C, A) + \text{Pr}(C, A, B) + \text{Pr}(C, B, A) \\
&= \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9} \\
&= \tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

# Revisitando o problema

Neste caso, o jogador:

– ganha o prêmio com probabilidade $\frac{2}{3}$, caso mude a porta.

– perde o prêmio com probabilidade $\frac{1}{3}$, caso mantenha a porta.

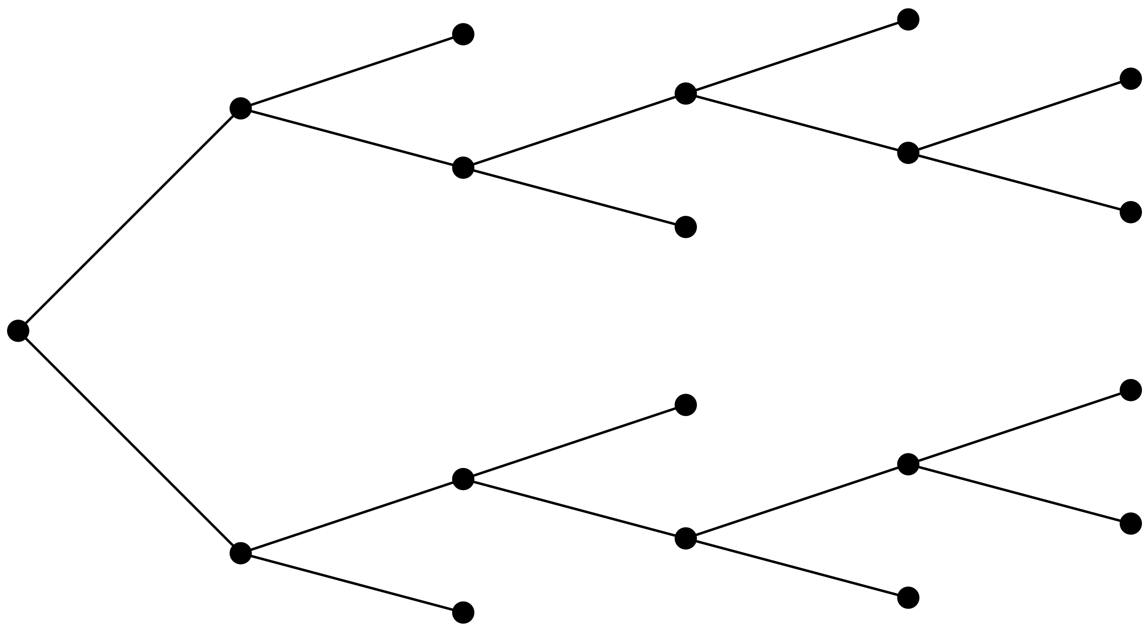
➜ Solução correta para as suposições apresentadas.

Vamos supor que o apresentador pode abrir ou não uma porta vazia e que ele só faz isso caso o jogador tenha escolhido a porta com prêmio.

➜ Nesse caso, se o jogador trocar de porta ele nunca ganha!

# Árvore de possibilidades e Princípio da multiplicação

- Uma árvore é um tipo particular de um grafo onde não existem ciclos.
- É uma estrutura muito útil para registrar todas as possibilidades em situações em que os eventos ocorrem em ordem.



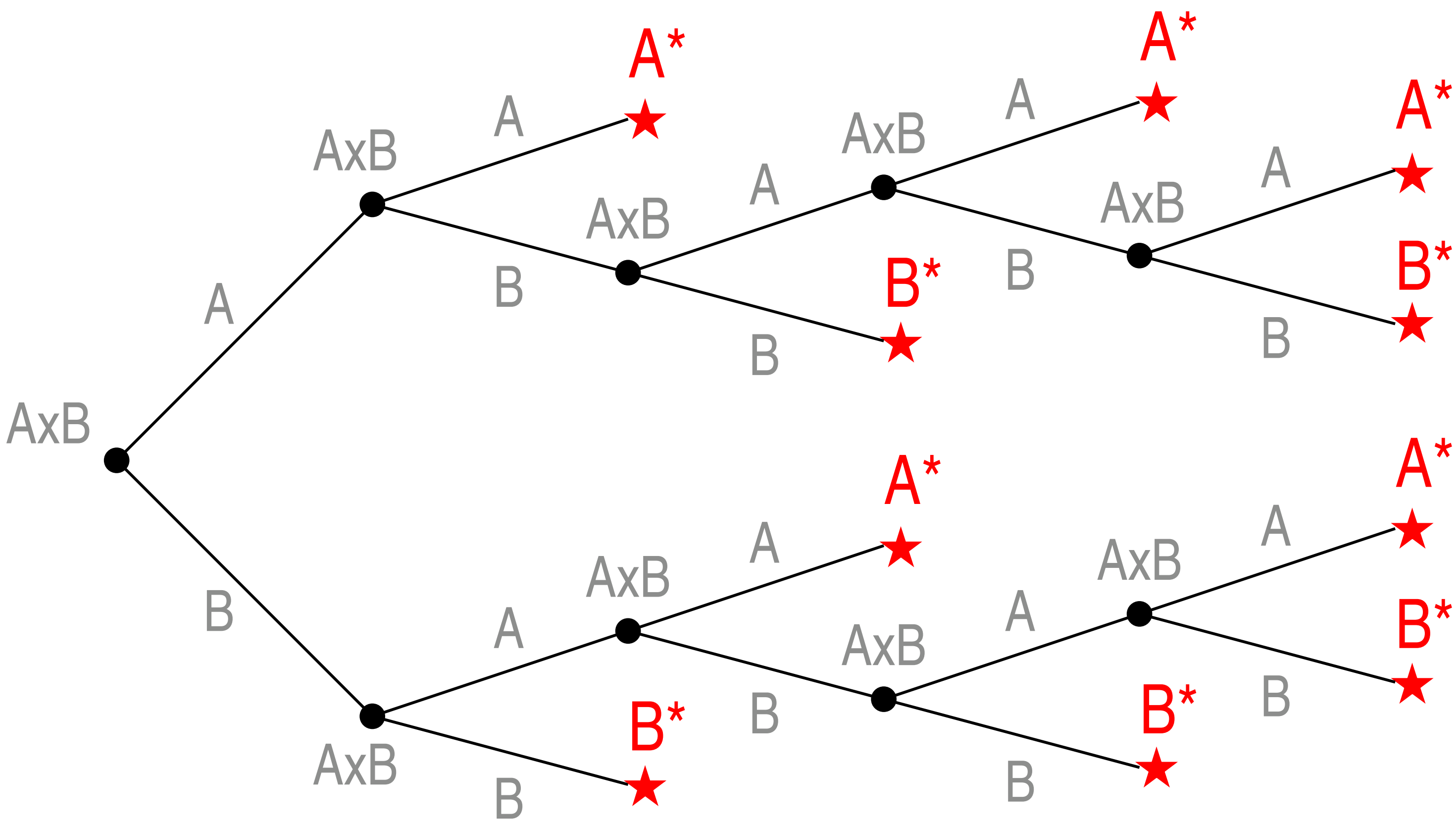
# Árvore de possibilidades e Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Regras para decisão de um torneiro entre os times $A$ e $B$:

– Cada jogo tem sempre um vencedor
– O time para ser campeão deve vencer dois jogos consecutivos ou um total de três jogos

De quantas formas diferentes o torneio pode ser jogado?

# Árvore de possibilidades e Princípio da multiplicação



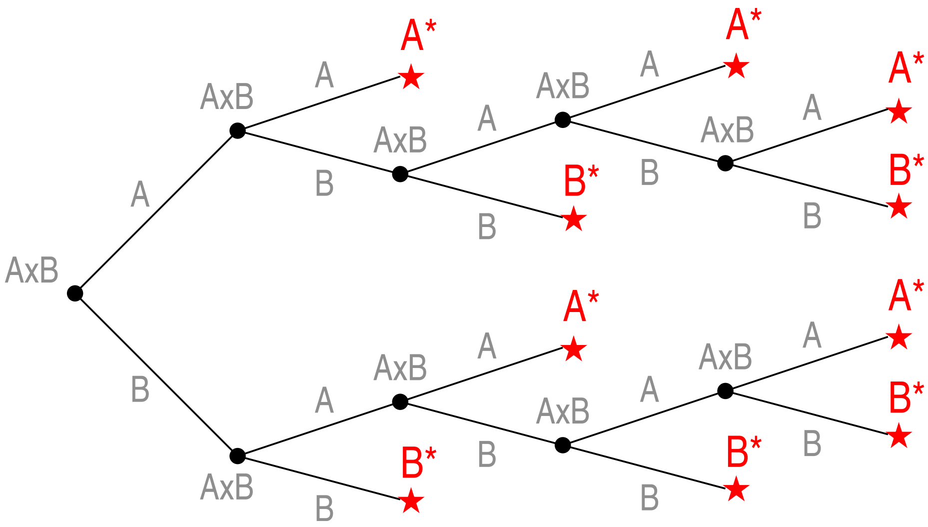

Notação: X* indica que o time X é vencedor.

# Árvore de possibilidades e Princípio da multiplicação

Exemplo 1 (continuação) Formas diferentes de o torneio ser jogado:

1. AA*
2. ABAA*
3. ABABA*
4. ABABB*
5. ABB*
6. BAA*
7. BABAA*
8. BABAB*
9. BABB*
10. BB*

Ou seja, 10 formas diferentes.

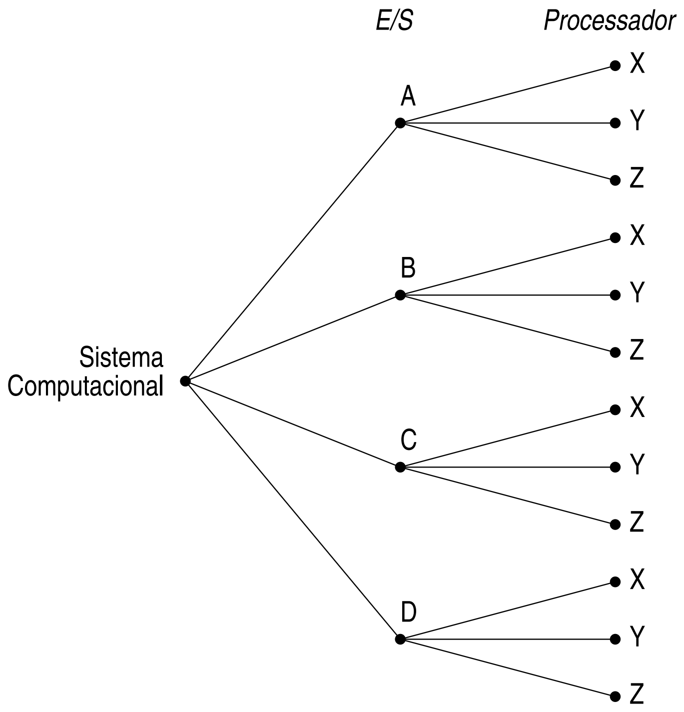


# Árvore de possibilidades e Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Considere um sistema computacional que possui quatro unidades de Entrada/Saída $A$, $B$, $C$ e $D$ e três processadores $X$, $Y$ e $Z$. Qualquer unidade de E/S pode ser conectada a um processador. Quantas possibilidades existem de conectar uma unidade de E/S a um processador?

$$4 \times 3 = 12$$

ou seja, 12 configurações diferentes



# Princípio da multiplicação

Se uma operação consiste em $k$ passos, sendo que

- o primeiro passo pode ser executado de $n_1$ formas diferentes, ou seja, existem $n_1$ possibilidades para o passo 1,
- o segundo passo pode ser executado de $n_2$ formas diferentes, e assim, sucessivamente, até
- o $k$-ésimo passo que pode ser executado de $n_k$ formas diferentes

então toda a operação pode ser executada de

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

formas diferentes.

# Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Um número de identificação é formado por uma sequência de quatro símbolos escolhidos de um conjunto formado pelas 26 letras do alfabeto e os 10 dígitos. Quantos números de identificação diferentes existem se repetição de símbolos é permitida?

Observe que:

– O conjunto de símbolos é formado por 36 símbolos $S = \{A, \ldots, Z, 0, \ldots, 9\}$.
– A ordem de ocorrência dos símbolos é importante.
– Para cada posição existem 36 possibilidades.

Assim, existem

$$36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 36^4 = 1\,679\,616$$

números de identificação diferentes.

# Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Suponha o mesmo cenário anterior de número de identificação mas com a restrição que símbolos não podem ser repetidos. Neste caso, quantos números de identificação existem?

Observe que:

– O conjunto de símbolos é formado por 36 símbolos.

– A ordem de ocorrência dos símbolos é importante.

– Para a primeira posição existem 36 possibilidades.

– Para a segunda posição, pode-se escolher um símbolo do subconjunto $S_2$ formado por $S$ menos o símbolo escolhido para a primeira posição. Assim, o subconjunto $S_2$ possui sempre 35 símbolos.

– Da mesma forma, para a terceira posição, o subconjunto $S_3$ possui 34 símbolos e, para a quarta posição, o subconjunto $S_4$ possui 33 símbolos.

Assim, existem

$$36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 = 1\,413\,720$$

números de identificação diferentes.

# Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Suponha que $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ são conjuntos com $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$ elementos respectivamente. Mostre que o conjunto $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ tem $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$ elementos.

Cada elemento em $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ é uma tupla ordenada da forma $(a_1, a_2, a_3, a_4)$, onde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $a_3 \in A_3$, $a_4 \in A_4$. O processo de construir estas tuplas ordenadas é uma operação de quatro passos:

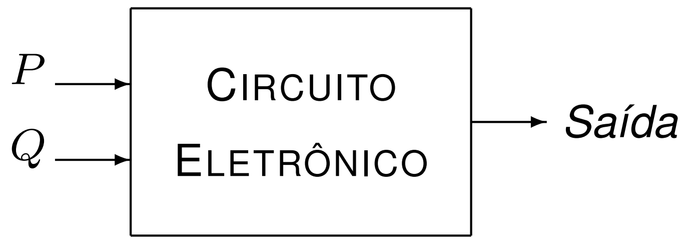
1. Selecione o primeiro elemento da tupla do conjunto $A_1$.
2. Selecione o segundo elemento da tupla do conjunto $A_2$.
3. Selecione o terceiro elemento da tupla do conjunto $A_3$.
4. Selecione o quarto elemento da tupla do conjunto $A_4$.

Para cada um dos passos 1 a 4 acima, existem $n_1, n_2, n_3, n_4$ formas respectivamente. Assim, pela regra da multiplicação existem $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$ tuplas distintas no conjunto $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$.

# Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Considere o conjunto de todos os circuitos eletrônicos com duas entradas lógicas ($P$ e $Q$) e uma saída lógica. Quantas tabelas da verdade distintas, considerando a entrada e saída, podem ser construídas para este cenário?

Esquema de um circuito e uma possível tabela de entrada e saída:




| | $P$ | $Q$ | *Saída* |
|---|---|---|---|
| 1ª linha → | 1 | 1 | 1 |
| 2ª linha → | 1 | 0 | 0 |
| 3ª linha → | 0 | 1 | 1 |
| 4ª linha → | 0 | 0 | 0 |

Observe que:

– Cada linha de entrada corresponde a uma possível entrada.
– Para cada linha existem duas possibilidades de saída.
– A ordem em que cada linha de entrada é considerada é importante.

# Princípio da multiplicação

Assim, existem

$$\underbrace{2}_{1^{\underline{a}} \text{ linha}} \cdot \underbrace{2}_{2^{\underline{a}} \text{ linha}} \cdot \underbrace{2}_{3^{\underline{a}} \text{ linha}} \cdot \underbrace{2}_{4^{\underline{a}} \text{ linha}} = 16$$

tabelas da verdade distintas.

# Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Considere o mesmo problema do exemplo anterior mas um circuito eletrônico com $k$ entradas. Quantas tabelas distintas existem?

Observe que:

– As mesmas considerações anteriores são válidas.
– Existem $2^k$ linhas de entrada diferentes.

Assim, existem

$$\underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^k \text{ vezes}} = 2^{2^k}$$

tabelas da verdade distintas.

Note que para o exemplo anterior ($k = 2$), temos $2^{2^2} = 2^4 = 16$ tabelas distintas.

# Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Quantas vezes os comandos do trecho de programa abaixo são executados?

**for** $i \leftarrow$ 1 **to** 4 **do**
  **for** $j \leftarrow$ 1 **to** 3 **do**
    *Comandos a serem executados*;
  **endfor**;
**endfor**;

Observe que:

– Claramente existe uma ordem para execução de cada comando.

– Veja que a combinação de variáveis de controle pode ser representada por um par ordenado $(i, j)$ que têm os seguintes valores:

$$(1, 1), \ldots, (1, 3), (2, 1), \ldots, (2, 3), \ldots, (4, 1), \ldots, (4, 3).$$

Assim, os comandos são executados

$$\underbrace{(4 - 1) + 1}_{i} \cdot \underbrace{(3 - 1) + 1}_{j} = 4 \cdot 3 = 12$$

vezes.

# Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 9}}$ Considere o mesmo problema do exemplo anterior com comandos de repetição aninhados. As variáveis de controle são $c_1, c_2, \ldots, c_n$, que podem assumir valores nas faixas $[I_{c_1}, Sc_1], [I_{c_2}, Sc_2], \ldots, [I_{c_n}, Sc_n]$, respectivamente ($I$ para inferior e $S$ para superior). Quantas vezes os comandos presentes no *loop* mais interno controlado pela variável $c_n$ são executados?

Observe que:

– As mesmas considerações anteriores são válidas.

Assim, os comandos presentes no *loop* mais interno controlado pela variável $c_n$ são executados

$$\underbrace{((Sc_1 - I_{c_1}) + 1)}_{c_1} \cdot \underbrace{((Sc_2 - I_{c_2}) + 1)}_{c_2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{((Sc_n - I_{c_n}) + 1)}_{c_n}$$

vezes.

# Princípio da multiplicação

Exemplo 10 Considere o seguinte problema: As posições de presidente, tesoureiro e secretário têm que ser escolhidas entre quatro pessoas $A$, $B$, $C$ e $D$. Além disso, existem duas restrições:

(a) $A$ não pode ser presidente;

(b) $C$ ou $D$ deve ser o secretário.

Quantas escolhas distintas existem?

É natural tentar resolver o problema usando o princípio de multiplicação. Uma possibilidade é fazer o seguinte raciocínio:

– Existem três escolhas para presidente já que $A$ não pode ser;
– Existem três escolhas para tesoureiro de um conjunto de quatro candidatos;
– Duas escolhas para secretário.

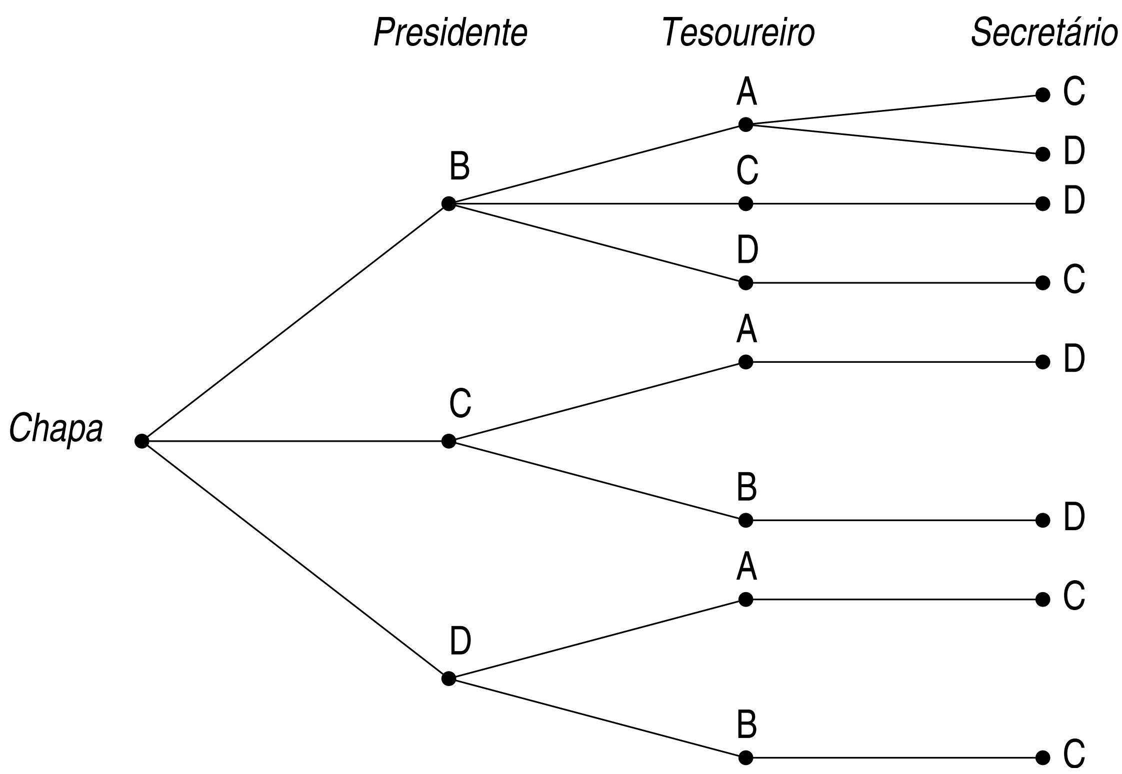
o que daria $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ possibilidades.

Observe que:

– O número de escolhas de secretário depende de como o presidente e o tesoureiro são escolhidos e o valor acima não é correto.

# Princípio da multiplicação

Exemplo 10 (continuação) A árvore abaixo mostra todas as possibilidades:




Este problema ilustra a questão da área de Combinatória:

➜ Em geral, a dificuldade não está em como contar mas o que contar.

# Princípio da multiplicação

Exemplo 10 (continuação) Estratégia para resolução do problema usando o princípio da multiplicação:

(a) Escolha o secretário, já que existem duas possibilidades apenas: $C$ ou $D$;

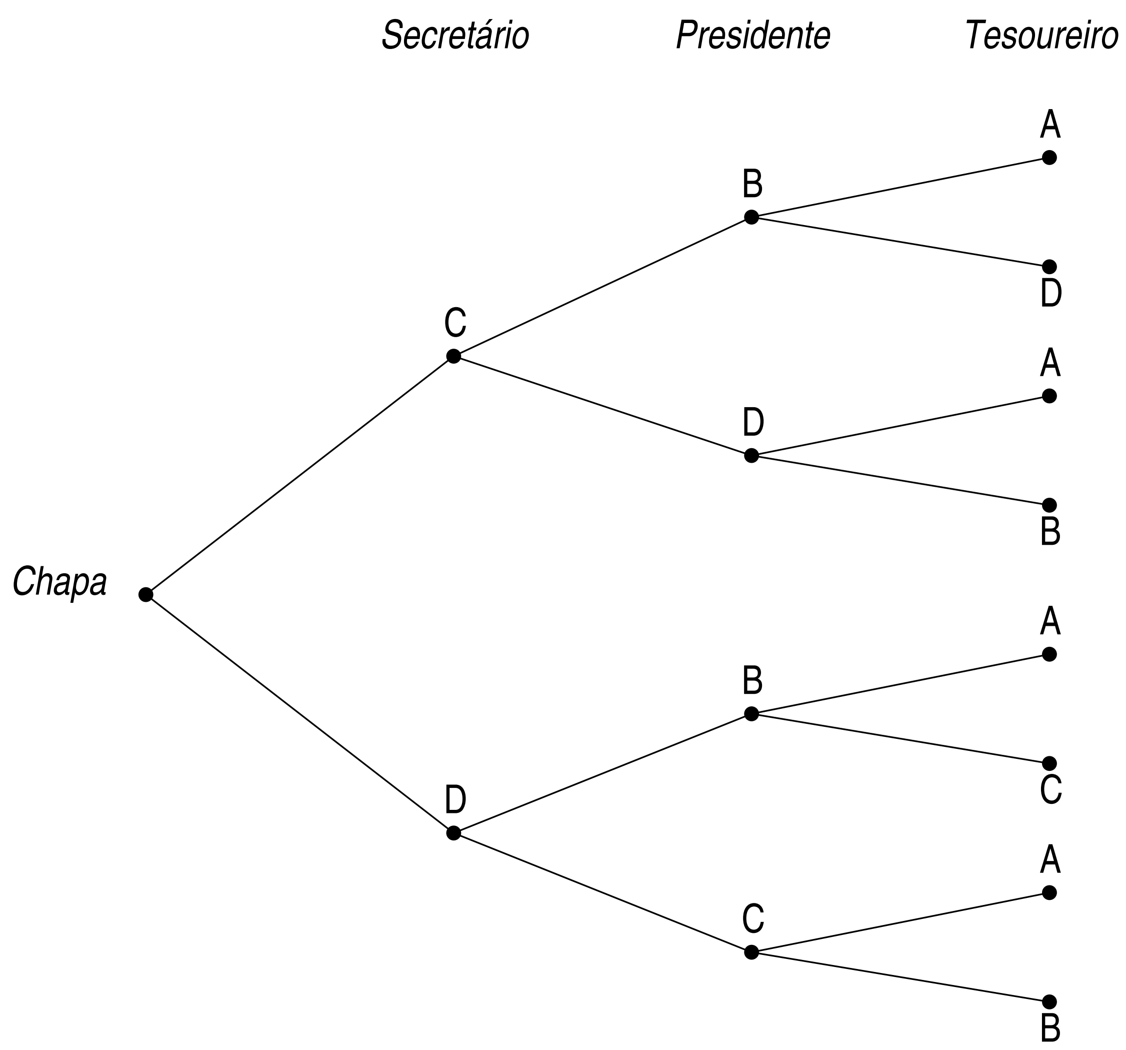
(b) Escolha o presidente. Neste caso, existem apenas duas possibilidades já que $A$ e a pessoa escolhida como secretário não podem ser escolhidas como presidente;

(c) Escolha o tesoureiro, que pode ser uma das duas pessoas restantes.

o que dá $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilidades.

# Princípio da multiplicação

Exemplo 10 (continuação) A árvore abaixo mostra todas essas possibilidades:



# Princípio da multiplicação

Exemplo 11 Um estudante tem:

- 4 livros de sistemas operacionais;
- 7 livros de programação; e
- 3 livros de estruturas de dados.

De quantas formas diferentes os livros podem ser colocados na prateleira de uma estante, dado que livros de um mesmo assunto devem ficar juntos?

Observe que:

- A ordem de ocorrência dos conjuntos de livros na estante é importante.
- Dentro de cada conjunto de livros a ordem também é importante.
- O problema pode ser dividido em duas partes: número de ordenações de conjuntos e, dentro de cada conjunto, ordenação dos livros.

# Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 11}}$ (continuação) A quantidade de ordenações de conjuntos de livros é dada por:

$$\underbrace{3}_{\text{\# possibilidades para o primeiro conjunto (esquerda)}} \cdot \underbrace{2}_{\text{\# possibilidades para o segundo conjunto (meio)}} \cdot \underbrace{1}_{\text{\# possibilidades para o terceiro conjunto (direita)}} = 6$$

Para cada um dos conjuntos de livros, temos as seguintes possibilidades:

– Sistemas operacionais (4 livros): $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$
– Programação (7 livros): $7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1 = 7!$
– Estruturas de dados (3 livros): $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

Assim, temos

$$6 \cdot (4! \cdot 7! \cdot 3!) = 4\,354\,560$$

possibilidades de colocar os livros na estante.

# Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Quantos inteiros de três dígitos são divisíveis por 5?

Observe que:

– Os números inteiros candidatos estão no intervalo $[100, 999]$.
– Os números candidatos terminam em 0 ou 5.

Primeira estratégia para resolver o problema:

– Os números divisíveis por 5 nesse intervalo podem ser "criados" a partir da concatenação de dígitos provenientes dos seguintes conjuntos, nessa ordem:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\{0, 5\}$$

Assim, essa quantidade é dada por:

$$\underbrace{9}_{\substack{\text{\# possibilidades para}\\ \text{o primeiro conjunto}\\ \text{(centena)}}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{\text{\# possibilidades para}\\ \text{o segundo conjunto}\\ \text{(dezena)}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{\# possibilidades para}\\ \text{o terceiro conjunto}\\ \text{(unidade)}}} = 180$$

# Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 12}}$ (continuação) Note que o mesmo problema pode ser resolvido por outra estratégia que não envolve o princípio da multiplicação.

Segunda estratégia para resolver o problema:

– Enumere os números divisíveis por 5 nesse intervalo:

$$\begin{array}{ccccccc} 100 & \ldots & 105 & \ldots & 995 & \ldots & 999 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 5 \cdot 20 & & 5 \cdot 21 & & 5 \cdot 199 & & \end{array}$$

– Assim, os divisores por 5 dos inteiros no intervalo $[100, 999]$ são os números $20, 21, \ldots, 199$.

– A quantidade de divisores é dada por $(199 - 20) + 1 = 180$.

# Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Quantos inteiros no intervalo [1,1000] são divisíveis por 3 ou divisíveis por 5?

Vamos usar a segunda estratégia do problema anterior:

(a) Enumere os números divisíveis por 3 nesse intervalo;
(b) Enumere os números divisíveis por 5 nesse intervalo;
(c) Enumere os números divisíveis por 3 e 5 (ou seja, 15) nesse intervalo.

➜ A solução deste problema é dado por (a) + (b) $-$ (c) = $333 + 200 - 66 = 467$.

(a) Números divisíveis por 3 nesse intervalo: 333.
   – $3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \ldots, 3 \cdot 333$.
(b) Números divisíveis por 5 nesse intervalo: 200.
   – $5 \cdot 1, 5 \cdot 2, \ldots, 5 \cdot 200$.
(c) Números divisíveis por 15 nesse intervalo: 66.
   – $15 \cdot 1, 15 \cdot 2, \ldots, 15 \cdot 66$.

# Princípio da multiplicação

Exemplo 14

Quantos números palíndromos existem que possuem cinco dígitos?

Um número palíndromo tem a seguinte regra de formação de dígitos:

$$\underline{\qquad\qquad} \quad \underline{\qquad\qquad} \quad \underline{\qquad\qquad} \quad \underline{\qquad\qquad} \quad \underline{\qquad\qquad}$$
$$1^\circ = d_1 \quad 2^\circ = d_2 \quad 3^\circ = d_3 \quad 4^\circ = d_2 \quad 5^\circ = d_1$$

Ou seja, o primeiro dígito e o quinto dígito são idênticos, assim como o segundo e quarto dígitos.

Vamos usar o seguinte raciocínio:

(a) Número de opções para o primeiro dígito $(d_1)$ = $n - 1$.
(b) Número de opções para o segundo dígito $(d_2)$ = $n$.
(c) Número de opções para o terceiro dígito $(d_3)$ = $n$.
(d) Número de opções para o quarto dígito $(d_2)$. É o mesmo valor do segundo dígito e deve ser considerado um único elemento que já foi contado.
(e) Número de opções para o quinto dígito $(d_1)$. É o mesmo valor do primeiro dígito e deve ser considerado um único elemento que já foi contado.

➜ A solução deste problema é dado por (a) $\times$ (b) $\times$ (c) = $(n-1) \cdot n \cdot n = n^3 - n^2$

# Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Use o princípio da multiplicação para provar que o conjunto

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

com $n$ elementos possui $2^n$ subconjuntos (que é a cardinalidade do conjunto $\mathcal{P}(X)$).

**Prova**. Um subconjunto qualquer de $X$ pode ser construído em $n$ passos:

1. Inclua ou não o elemento $x_1$;
2. Inclua ou não o elemento $x_2$;

⋮

$n$. Inclua ou não o elemento $x_n$;

Em cada passo existem duas possibilidades. Assim, o número de subconjuntos de $X$ é dado por:

$$\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ fatores}} = 2^n$$

Observe, por exemplo, que o conjunto $\emptyset$ é obtido quando nenhum elemento de $X$ é escolhido.

# Permutação

- Definição: um arranjo ordenado de objetos sem repetição.
  ➜ A ordem é importante.
  ➜ Pode-se aplicar o princípio da multiplicação.

- Exemplo 16 Seja o conjunto $A = \{a, b, c\}$.
  (a) Quantas permutações existem?

$$\underbrace{\quad 3 \quad}_{\text{\# possibilidades para o primeiro elemento}} \cdot \underbrace{\quad 2 \quad}_{\text{\# possibilidades para o segundo elemento}} \cdot \underbrace{\quad 1 \quad}_{\text{\# possibilidades para o terceiro elemento}} = 6$$

  (b) Quais são elas?

1. $abc$ 2. $acb$

3. $bac$ 4. $bca$

5. $cab$ 6. $cba$

# Permutação: Caso I

- Seja um conjunto com $n$ elementos. Quantas permutações existem considerando todos os elementos e que não há repetição?

- Observe que:
  - A ordem de ocorrência dos símbolos do conjunto é importante.

- Aplicando-se o princípio da multiplicação, temos:

$$\underbrace{\text{n}}_{\substack{\text{\# possibilidades para}\\ \text{o primeiro elemento}}} \cdot \underbrace{\text{(n-1)}}_{\substack{\text{\# possibilidades para}\\ \text{o segundo elemento}}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\text{1}}_{\substack{\text{\# possibilidades para}\\ \text{o n-ésimo elemento}}} = n!$$

# Permutação: Caso II

- Seja um conjunto com $n$ elementos. Quantas permutações existem considerando $r$ ($1 \leq r \leq n$) elementos desse conjunto e que não há repetição?

- Observe que:
  – A ordem de ocorrência dos símbolos do conjunto é importante.

- Aplicando-se o princípio da multiplicação, temos:

$$\underbrace{\text{n}}_{\substack{\text{\# possibilidades para} \\ \text{o primeiro elemento}}} \cdot \underbrace{\text{(n-1)}}_{\substack{\text{\# possibilidades para} \\ \text{o segundo elemento}}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\text{(n-r+1)}}_{\substack{\text{\# possibilidades para} \\ \text{o r-ésimo elemento}}} =$$

$$\prod_{i=n-r+1}^{n} i = (n-r+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n =$$

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot \frac{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

# Permutação: Caso genérico

Dado um conjunto com $n$ ($n \geq 1$) elementos e um valor de $r$ ($1 \leq r \leq n$), existem

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

permutações de elementos desse conjunto considerando que não há repetição.

Lembre-se que na Permutação:

- ➜ Elementos não são repetidos.
- ➜ A ordem em que esses elementos aparecem é importante, ou seja, a permutação pode ser representada por uma tupla ordenada.

# Permutação: Caso genérico

$\boxed{\text{Exemplo 17}}$ Avalie as seguintes permutações:

(a) $P(5,2)$.

$$P(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$$

(b) Quantidade de permutações de tamanho 4 de um conjunto de 7 objetos.

$$P(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 840$$

# Permutação: Caso genérico

$\boxed{\text{Exemplo 18}}$ Avalie $P(n,2)+P(n,1)$, para $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
P(n,2)+P(n,1) &= \frac{n!}{(n-2)!}+\frac{n!}{(n-1)!} \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-2)!}+\frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} \\
&= n\cdot(n-1)+n \\
&= n^2-n+n \\
&= n^2
\end{aligned}$$

# Permutação

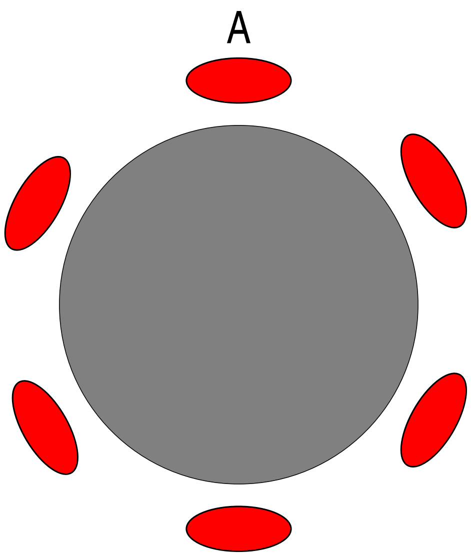
$\boxed{\text{Exemplo 19}}$ Permutações de letras de uma palavra:

(a) De quantas formas diferentes as letras da palavra `COMPUTER` podem ser arranjadas numa sequência (fila)?
Todas as letras na palavra `COMPUTER` são distintas. Assim, o número de formas distintas de arranjar as letras é o número de permutações de um conjunto de oito elementos, ou seja, $8! = 40\,320$.

(b) De quantas formas diferentes as letras da palavra `COMPUTER` podem ser arranjadas se as letras `CO` devem permanecer unidas nesta ordem?
Se as letras `CO` devem permanecer unidas existem efetivamente sete objetos a serem arranjados. Assim, o número de permutações é $7! = 5\,040$.

# Permutação

$\boxed{\text{Exemplo 20}}$ Permutações de objetos ao redor de um círculo:




Numa reunião, seis pessoas vão estar sentadas à mesa que tem formato circular. De quantas formas diferentes essas pessoas podem se sentar?

Identifique as pessoas como A, B, C, D, E e F. Somente as posições relativas importam já que não existe uma identificação de assento na mesa. Por exemplo, comece com A e considere todos os arranjos das outras pessoas em relação a A. As pessoas B a F podem se sentar em volta de A de todas as formas possíveis. Assim, existem $5! = 120$ formas de arranjar o grupo.

# Princípio da adição

- Existem problemas de contagem que podem ser resolvidos contando o número de elementos:
  - na união de dois conjuntos,
  - na diferença entre dois conjuntos, e
  - na intersecção de dois conjuntos

- O princípio a ser usado neste caso é chamado de Princípio da Adição.

# Princípio da adição

Se uma operação consiste em $k$ passos distintos, onde os passos são mutuamente disjuntos, sendo que

- o primeiro passo pode ser executado de $n_1$ formas diferentes, ou seja, existem $n_1$ possibilidades para o passo 1,
- o segundo passo pode ser executado de $n_2$ formas diferentes, e assim sucessivamente até
- o $k$-ésimo passo que pode ser executado de $n_k$ formas diferentes

então toda a operação pode ser executada de

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

formas diferentes.

# Princípio da adição

$\boxed{\text{Exemplo 21}}$ Uma senha de usuário de um sistema computacional pode ser formada por sequências de uma a três letras maiúsculas, sendo que repetições são permitidas. Quantas senhas diferentes existem?

Observe que:

– O conjunto de todas as senhas é formada pelos subconjuntos de senhas de uma, duas e três letras.

Em cada um desses subconjuntos temos a seguinte quantidade de senhas:

– Uma letra: $26$
– Duas letras: $26 \cdot 26 = 26^2$
– Três letras: $26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3$

Assim, pelo princípio da adição temos:

$$26 + 26^2 + 26^3 = 18\,278$$

senhas de usuário diferentes.

# Princípio da adição

$\boxed{\text{Exemplo 22}}$ Quantos números inteiros ímpares existem no intervalo [10,99] com dígitos distintos?

$$\left[\begin{array}{l}\text{Números com}\\ \text{dígitos distintos}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{Dígitos das dezenas}\\ \boxed{\text{I}}\end{array}\right] \times \left[\begin{array}{l}\text{Dígitos das unidades}\\ \boxed{\text{II}}\end{array}\right] - 5$$

Os cinco números ímpares com dígitos iguais são 11, 33, 55, 77 e 99. Logo, deve-se subtrair 5.

$\boxed{\text{I}}$ $|\{1, 2, \ldots, 9\}| = 9$

$\boxed{\text{II}}$ $|\{1, 3, 5, 7, 9\}| = 5$

Números com dígitos distintos $= 9 \times 5 - 5 = 40$

# Princípio da adição

Uma consequência importante do princípio da adição é que se o número de elementos de um conjunto $A$ ($n(A)$) e de um subconjunto próprio $B$ ($n(B)$) de $A$ são ambos conhecidos, então o número de elementos de $A$ que não estão em $B$ pode ser calculado:

$$n(A - B) = n(A) - n(B)$$

A expressão acima é verdadeira já que se $B$ é um subconjunto de $A$, então

$$B \cup (A - B) = A$$

e os dois conjuntos $B$ e $A - B$ não possuem elementos em comum. Assim, pelo princípio da adição,

$$\begin{aligned} n(B) + n(A - B) &= n(A) \\ n(A - B) &= n(A) - n(B) \end{aligned}$$

# Princípio da adição

Exemplo 23 No exemplo 3 vimos que existem $36^4 = 1\,679\,616$ identificadores formados por uma sequência de quatro símbolos escolhidos de um conjunto formado pelas 26 letras do alfabeto e os 10 dígitos, com repetição de símbolos. Dessa quantidade quantos identificadores possuem pelo menos um símbolo repetido?

Observe que:

– A quantidade de identificadores com pelo menos um símbolo repetido é dado por:

  Total de identificadores de tamanho quatro com símbolos repetidos e não repetidos menos total de identificadores de tamanho quatro com símbolos não repetidos.

Assim, o total de identificadores de tamanho quatro com pelo menos um símbolo repetido é dado por

$$36^4 - (36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33) = 1\,679\,616 - 1\,413\,720 = 265\,896$$

# Princípio da adição

$\boxed{\text{Exemplo 24}}$ Quantos números inteiros existem no intervalo $[1, 100\,000]$ que contêm o algarismo 6 exatamente uma única vez?

O algarismo 6 pode aparecer exatamente uma única vez nas seguintes posições:

$$
\begin{array}{ccccc}
\underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{6} \\
\underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{6} & \underline{\quad} \\
\underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{6} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\
\underline{\quad} & \underline{6} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\
\underline{6} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad}
\end{array}
$$

Nas outras posições podemos escolher qualquer algarismo de $0$ a $9$, exceto o $6$, ou seja, nove possibilidades.

Assim, temos $5 \cdot 9^4 = 32805$ números.

# Princípio da adição

$\boxed{\text{Exemplo 25}}$ Quantos números inteiros existem no intervalo $[1, 100\,000]$ que contêm pelo menos um algarismo $6$?

Para resolver este problema, vamos calcular a quantidade de números que não tem o algarismo 6 no intervalo. Neste caso, o intervalo fica alterado para $[1, 99\,999]$ já que $100\,000$ não contém o algarismo $6$.

Temos cinco posições onde podemos preencher com os algarismos de $0$ a $9$, exceto o $6$, ou seja, temos nove possibilidades, o que gera $9^5 = 59\,049$ números sem o algarismo $6$. No entanto, uma dessas sequências é formada por cinco $0$'s, que está fora do intervalo pedido e, assim, temos $59\,049 - 1 = 59\,048$ números no intervalo $[1, 99\,999]$ que não contêm o algarismo $6$.

Sabemos que no intervalo $[1, 99\,999]$ temos $99\,999$ números sendo que $59\,048$ deles não contêm o algarismo 6. Logo, temos

$$99\,999 - 59\,048 = 40\,951$$

números que contêm pelo menos um algarismo $6$.

# Princípio da adição

Exemplo 26 O segredo de um cofre requer três números no intervalo $[1, 39]$. Suponha que o segredo pode ser construído de tal forma que o mesmo número não pode ser usado em sequência mas o mesmo número pode ser usado na primeira e terceira posições. Quantos segredos existem?

Podemos resolver este problema usando a seguinte estratégia:

(a) Calcular a quantidade de segredos supondo que sequências de números idênticos são permitidas;
   - Isto é dado por $39^3 = 59\,319$.

(b) Calcular a quantidade de segredos onde os três números são idênticos;
   - Existem exatamente 39 segredos onde os três números são idênticos.

(c) Calcular a quantidade de segredos onde existem dois números idênticos em sequência;
   - Existem $(39 \times 38) \times 2 = 2\,964$ segredos onde há dois números idênticos em sequência. Estes dois cenários podem ser representados por:

$$\underset{1}{\underline{n_1}} \quad \underset{2}{\underline{n_1}} \quad \underset{3}{\underline{n_2 \neq n_1}} \quad \text{e} \quad \underset{1}{\underline{n_2 \neq n_1}} \quad \underset{2}{\underline{n_1}} \quad \underset{3}{\underline{n_1}} .$$

   sendo que $n_1$ pode variar de 1 a 39 e $n_2$ também, exceto que não pode ter o mesmo valor de $n_1$.

Logo, o número de segredos que satisfazem o problema é dado por

$$\text{(a)} - \text{(b)} - \text{(c)} = 59\,319 - 39 - 2\,964 = 56\,316.$$

# Princípio da adição

$\boxed{\text{Exemplo 26}}$ (continuação)

De uma forma genérica, o segredo de um cofre que requer três números no intervalo $[1, n]$, onde o mesmo número não pode ser usado em sequência mas o mesmo número pode ser usado na primeira e terceira posições tem a seguinte quantidade de segredos:

(a) Quantidade de segredos supondo que sequências de números idênticos são permitidas:
   – Isto é dado por $n^3$.

(b) Quantidade de segredos onde os três números são idênticos:
   – Existem exatamente $n$ segredos onde os três números são idênticos.

(c) Quantidade de segredos onde existem dois números idênticos em sequência:
   – Existem $n \times (n-1) \times 2$ segredos onde há dois números idênticos em sequência.

Logo, a quantidade de segredos que satisfazem o problema é dado por

$$\text{(a)} - \text{(b)} - \text{(c)} = n^3 - n - 2n(n-1) = n^3 - 2n^2 + n.$$

# Resolvendo o mesmo problema com o princípio da multiplicação

Exemplo 26 (continuação)

Este mesmo problema pode ser resolvido usando o princípio da multiplicação da seguinte forma:

(a) Quantidade de números que podem ser usados como primeiro número do segredo:
   - Isto é dado por $n$.

(b) Quantidade de números que podem ser usados como segundo número do segredo:
   - Isto é dado por $n-1$, já que o primeiro número do segredo não pode ser repetido no segundo número.

(c) Quantidade de números que podem ser usados como terceiro número do segredo:
   - Isto também é dado por $n-1$. Note que temos $n$ opções de números como terceira opção, mas o segundo número não pode ser usado na terceira opção.

Logo, a quantidade de segredos que satisfazem o problema é dado por

$$\text{(a)} \times \text{(b)} \times \text{(c)} = n(n-1)(n-1) = n(n^2-2n+1) = n^3-2n^2+n.$$

# Combinação e Permutação

- Para cada combinação $C(n, r)$, existem $r!$ formas de permutar os $r$ objetos.
- Ou ainda, para cada permutação $P(n, r)$ existem $r!$ arranjos com o mesmo conjunto de $r$ objetos distintos.
- Pelo Princípio da Multiplicação, o número de *permutações* de $r$ objetos distintos escolhidos de $n$ objetos é o produto da quantidade de formas de escolher os $r$ objetos, $C(n, r)$, pela quantidade de formas de arranjar os $r$ objetos, $r!$, ou seja,

$$C(n, r) \cdot r! = P(n, r)$$

Ou ainda

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

# Combinação e Permutação

Exemplo 27

Enfileiramento: De quantas formas diferentes pode-se formar uma fila com sete marcianos e cinco jovianos, sendo que dois jovianos não podem ficar juntos?

Se dois jovianos não podem ficar juntos, a única configuração possível de lugares na fila é dada por:

$$\underset{1}{\_\_\_}\ \ M_1\ \ \underset{2}{\_\_\_}\ \ M_2\ \ \underset{3}{\_\_\_}\ \ M_3\ \ \underset{4}{\_\_\_}\ \ M_4\ \ \underset{5}{\_\_\_}\ \ M_5\ \ \underset{6}{\_\_\_}\ \ M_6\ \ \underset{7}{\_\_\_}\ \ M_7\ \ \underset{8}{\_\_\_}$$

onde $M_i, i = 1 \ldots 7$, representam os marcianos e as posições vazias de $1$ a $8$ representam os possíveis lugares que os jovianos podem ocupar, sendo que três delas estarão vazias já que temos apenas cinco jovianos.

Assim, este enfileiramento pode ser feito em duas etapas:

(a) Posições dos marcianos no cenário acima:
  - Isto é dado por $7! = 5\,040$.

(b) Posições dos jovianos nos oito lugares acima:
  - Note que devemos escolher cinco posições e para cada conjunto de posições ter uma permutação. Isto é dado por $C(8,5) \cdot 5!$, que é exatamente $P(8,5) = 6\,720$

A quantidade total de enfileiramentos é dada por $5\,040 \cdot 6\,720 = 33\,868\,800$.

# Combinação

- Definição: Sejam $n$ e $r$ inteiros não negativos com $r \leq n$. Uma combinação $r$ de um conjunto de $n$ elementos é um subconjunto de $r$ dos $n$ elementos.

- $C(n, r)$ representa o número de subconjuntos de tamanho $r$ que podem ser obtidos de um conjunto de $n$ elementos.

- Formas para representação de uma combinação:
  - $C(n, r)$
  - $\binom{n}{r}$
  - $C_{n,r}$
  - ${}_nC_r$
  - ${}^nC_r$

# Combinação e Permutação

$\boxed{\text{Exemplo 28}}$ Quantas combinações de dois elementos podem ser obtidas do conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$?

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Esses seis conjuntos são:

| | |
|---|---|
| $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}$ | subconjuntos que contêm 0. |
| $\{1, 2\}, \{1, 3\}$ | subconjuntos que contêm 1 mas que não foram listados. |
| $\{2, 3\}$ | subconjuntos que contêm 2 mas que não foram listados. |

# Combinação e Permutação

Exemplo 29 Quantos números inteiros existem no intervalo $[1, 99\,999]$ que contêm exatamente os dígitos 2, 3, 4 e 5?

Posições que os dígitos podem ser colocados:

$$\underset{1}{\_\_\_\_}\quad\underset{2}{\_\_\_\_}\quad\underset{3}{\_\_\_\_}\quad\underset{4}{\_\_\_\_}\quad\underset{5}{\_\_\_\_}$$

Idéia:

– Cada número será representado com cinco dígitos. Assim, `1` será escrito como `00001`.

# Combinação e Permutação

$\boxed{\text{Exemplo 29}}$ (continuação)

Devemos:

(a) Calcular a quantidade de subconjuntos de quatro posições que irão ter os quatro dígitos obrigatórios;

– Isto é dado por $C(5, 4) = 5$. Existem cinco conjuntos de quatro posições onde os dígitos obrigatórios podem ser colocados.

(b) Calcular a quantidade de permutações que podemos ter com os quatro dígitos obrigatórios;

– Isto é dado por $4! = 24$. Para cada conjunto de quatro posições existem 24 permutações para os quatro dígitos obrigatórios.

(c) Calcular a quantidade de números no intervalo que podemos ter com os dígitos obrigatórios.

– Isto é dado por $5 \times 24 = 120$.

(d) Calcular a quantidade de números no intervalo que podemos ter incluindo os dígitos restantes, ou seja, {0, 1, 6, 7, 8, 9}.

– Isto é dado por $6 \times 120 = 720$. Existem seis outros dígitos que podem ocupar a quinta e última posição restante para cada permutação dos quatro dígitos obrigatórios.

# Combinação

- Suponha que desejamos selecionar $r$ objetos distintos de um conjunto de $n$ elementos mas a ordem não é importante.

- Neste caso, estamos contando o número de *combinações* de $r$ ($r \leq n$) objetos distintos escolhidos de um conjunto de $n$ ($n \geq 1$) elementos onde a ordem não é importante.

# Combinação

Exemplo 30 Numa escola, há 10 professores de Matemática e 15 de Português. Pretende-se formar, com esses professores, uma comissão de sete membros. Quantas comissões distintas podem ser formadas?

Observe que:

– O conjunto possui 25 professores.

– A ordem não é importante.

$$\begin{aligned} C(25,7) &= \frac{25!}{7! \cdot 18!} \\ &= \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18!}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 18!} \\ &= 2\,043\,500 \end{aligned}$$

# Combinação

$\boxed{\text{Exemplo 31}}$ Suponha que times de 5 pessoas vão ser formados de um grupo de 12 pessoas. Duas pessoas desse grupo (A e B) insistem em trabalhar conjuntamente. Assim, ao se formar um time, ou as duas pessoas estão presentes ou não. Quantos times podem ser formados?

$$\left[\text{N}^{\underline{\text{o}}}\text{ total de times}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de times que contêm} \\ \text{A e B} \\ \boxed{\text{I}}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{l}\text{N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de times que não contêm} \\ \text{nem A nem B} \\ \boxed{\text{II}}\end{array}\right]$$

$\boxed{\text{I}}$ $C(10,3) = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$

Os times que contêm A e B devem ter mais 3 pessoas das 10 restantes do grupo.

$\boxed{\text{II}}$ $C(10,5) = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = 252$

Os times que não contêm A e B devem ter 5 pessoas das 10 restantes do grupo.

N$^{\underline{\text{o}}}$ total de times $= 120 + 252 = 372$

# Combinação

$\boxed{\text{Exemplo 32}}$ Suponha o mesmo cenário anterior mas agora A e B não podem pertencer simultaneamente a um mesmo time. Quantos times podem ser formados?

$$\left[\text{Nº total de times}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{Nº de times com}\\ \text{A e sem B}\\ \boxed{\text{I}}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{l}\text{Nº de times com}\\ \text{B e sem A}\\ \boxed{\text{II}}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{l}\text{Nº de times sem}\\ \text{A e sem B}\\ \boxed{\text{III}}\end{array}\right]$$

$\boxed{\text{I}}$ $C(10,4) = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = 210$

Os times com A e sem B devem ter mais 4 pessoas das 10 restantes do grupo (10 porque A e B estão fora e 4 porque A é uma das 5 pessoas).

$\boxed{\text{II}}$ $C(10,4) = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = 210$

Idem ao anterior.

$\boxed{\text{III}}$ $C(10,5) = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = 252$

Os times que não contêm A e B devem ter 5 pessoas das 10 restantes do grupo.

Nº total de times $= 210 + 210 + 252 = 672$

# Combinação

$\boxed{\text{Exemplo 32}}$ Este problema também pode ser resolvido de outra forma:

$$\left[\text{Nº total de times}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{Nº de times com} \\ \text{5 pessoas} \\ \boxed{\text{I}}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{l}\text{Nº de times com} \\ \text{A e com B} \\ \boxed{\text{II}}\end{array}\right]$$

$\boxed{\text{I}}$ $C(12, 5) = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = 792$

Total de times com 5 pessoas.

$\boxed{\text{II}}$ $C(10, 3) = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$

Os times que contêm A e B devem ter mais 3 pessoas das 10 restantes do grupo.

Nº total de times $= 792 - 120 = 672$

# Expressões “pelo menos” e “no máximo”

- Seja um conjunto $S$ com 5 elementos.

- O que significa escolher subconjuntos com
  - “pelo menos” 3 elementos de $S$, e
  - “no máximo” 2 elementos de $S$?

- “Pelo menos” 3 elementos de $S$:
  - Significa escolher subconjuntos com 3, 4 ou 5 elementos.

- “No máximo” 2 elementos de $S$:
  - Significa escolher subconjuntos com 0, 1 ou 2 elementos.

# Combinação

$\boxed{\text{Exemplo 33}}$ Suponha que o grupo de 12 pessoas seja formado por 5 homens e 7 mulheres. Quantos times de 5 pessoas podem ser formados com 3 homens e 2 mulheres?

$$\left[\text{Nº total de times}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{Nº de times com}\\ \text{3 homens}\\ \boxed{\text{I}}\end{array}\right] \times \left[\begin{array}{l}\text{Nº de times com}\\ \text{2 mulheres}\\ \boxed{\text{II}}\end{array}\right]$$

$\boxed{\text{I}}$ $C(5,3) = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$

Total de times com 3 homens.

$\boxed{\text{II}}$ $C(7,2) = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = 21$

Total de times com 2 mulheres.

Nº total de times $= 10 \times 21 = 210$

Note que o princípio da multiplicação deve ser aplicado já que temos possibilidades diferentes para formação dos times.

# Combinação

$\boxed{\text{Exemplo 34}}$ Suponha o mesmo grupo anterior. Quantos times de 5 pessoas podem ser formados com pelo menos um homem?

$$\left[\text{Nº total de times}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{Nº de times com}\\ \text{5 pessoas}\\ \boxed{\text{I}}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{l}\text{Nº de times com}\\ \text{nenhum homem}\\ \boxed{\text{II}}\end{array}\right]$$

$\boxed{\text{I}}$ $C(12, 5) = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = 792$

Total de times com 5 pessoas incluindo homens e mulheres.

$\boxed{\text{II}}$ $C(7, 5) = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21$

O total de times com nenhum homem é exatamente a quantidade de times formados apenas por mulheres.

Nº total de times $= 792 - 21 = 771$

# Combinação

$\boxed{\text{Exemplo 34}}$ Este problema também pode ser resolvido de outra forma:

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{4} \quad + \quad \{\text{Times com 1 homem e 4 mulheres}\}$$

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} \quad + \quad \{\text{Times com 2 homens e 3 mulheres}\}$$

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{7}{2} \quad + \quad \{\text{Times com 3 homens e 2 mulheres}\}$$

$$\binom{5}{4} \cdot \binom{7}{1} \quad + \quad \{\text{Times com 4 homens e 1 mulher}\}$$

$$\binom{5}{5} \cdot \binom{7}{0} \quad \quad \{\text{Times com 5 homens e nenhuma mulher}\}$$

# Combinação

Exemplo 35 Suponha o mesmo grupo anterior. Quantos times de 5 pessoas podem ser formados com no máximo um homem?

$$\left[\text{Nº total de times}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{Nº de times com}\\ \text{nenhum homem}\\ \boxed{\text{I}}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{l}\text{Nº de times com}\\ \text{um homem}\\ \boxed{\text{II}}\end{array}\right]$$

$\boxed{\text{I}}$ $C(7,5) = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$

O total de times com nenhum homem é exatamente a quantidade de times formados apenas por mulheres.

$\boxed{\text{II}}$ $C(5,1) \cdot C(7,4) = \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 5 \cdot 35 = 175$

O total de times com um homem e quatro mulheres.

Nº total de times $= 21 + 175 = 196$

# Combinação

$\boxed{\text{Exemplo 36}}$ Numa escola, há 10 professores de Matemática e 15 de Português. Pretende-se formar, com esses professores, uma comissão de sete membros. Quantas comissões distintas podem ser formadas com, pelo menos, um professor de Matemática?

$$\left[\text{Nº total de comissões}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{Nº de comissões com} \\ \text{7 pessoas} \\ \boxed{\text{I}}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{l}\text{Nº de comissões com} \\ \text{nenhum professor de} \\ \text{Matemática} \\ \boxed{\text{II}}\end{array}\right]$$

$\boxed{\text{I}}$ $C(25, 7) = \frac{25!}{7! \cdot 18!} = 2\,043\,500$

Total de comissões com 7 pessoas incluindo professores de Matemática e Português.

$\boxed{\text{II}}$ $C(15, 7) = \frac{15!}{7! \cdot 8!} = 25\,740$

O total de comissões com nenhum professor de Matemática é exatamente a quantidade de comissões formadas apenas por professores de Português.

Nº total de comissões $= 2\,043\,500 - 25\,740 = 2\,017\,760$

# Combinação

$\boxed{\text{Exemplo 36}}$ Este problema também pode ser resolvido de outra forma:

$$\binom{10}{1} \cdot \binom{15}{6} + \text{\{Comissões com 1 professor de Matemática e 6 professores de Português\}}$$

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{15}{5} + \text{\{Comissões com 2 professores de Matemática e 5 professores de Português\}}$$

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{15}{4} + \text{\{Comissões com 3 professores de Matemática e 4 professores de Português\}}$$

$$\binom{10}{4} \cdot \binom{15}{3} + \text{\{Comissões com 4 professores de Matemática e 3 professores de Português\}}$$

$$\binom{10}{5} \cdot \binom{15}{2} + \text{\{Comissões com 5 professores de Matemática e 2 professores de Português\}}$$

$$\binom{10}{6} \cdot \binom{15}{1} + \text{\{Comissões com 6 professores de Matemática e 1 professor de Português\}}$$

$$\binom{10}{7} \cdot \binom{15}{0} \quad \text{\{Comissões com 7 professores de Matemática e nenhum professor de Português\}}$$

# Combinação

**Exemplo 37** Suponha o mesmo grupo anterior. Quantas comissões distintas podem ser formadas com, pelo menos, dois professores de Matemática e, pelo menos, três professores de Português?

➜ Por que o raciocínio abaixo está errado?

$$\left[\begin{array}{l}\text{N}^{\underline{o}}\text{ de comissões com}\\ \text{2 professores de Ma-}\\ \text{temática}\\ \boxed{\text{I}}\end{array}\right] \times \left[\begin{array}{l}\text{N}^{\underline{o}}\text{ de comissões com}\\ \text{3 professores de Por-}\\ \text{tuguês}\\ \boxed{\text{II}}\end{array}\right] \times \left[\begin{array}{l}\text{N}^{\underline{o}}\text{ de comissões com}\\ \text{2 professores dentre}\\ \text{os restantes de Ma-}\\ \text{temática e/ou Portu-}\\ \text{guês}\\ \boxed{\text{III}}\end{array}\right]$$

$\boxed{\text{I}}$ $C(10,2) = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$
N$^{\underline{o}}$ de comissões com 2 professores de Matemática.

$\boxed{\text{II}}$ $C(15,3) = \frac{15!}{3!\cdot 12!} = 455$
N$^{\underline{o}}$ de comissões com 3 professores de Português.

$\boxed{\text{III}}$ $C(20,2) = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = 190$
N$^{\underline{o}}$ de comissões com 2 professores dentre os restantes de Matemática e/ou Português. Note que ficam 20 professores dos 25 do grupo, já que 5 foram escolhidos.

N$^{\underline{o}}$ total de comissões $= 45 \cdot 455 \cdot 190 = 3\,890\,250$

# Combinação

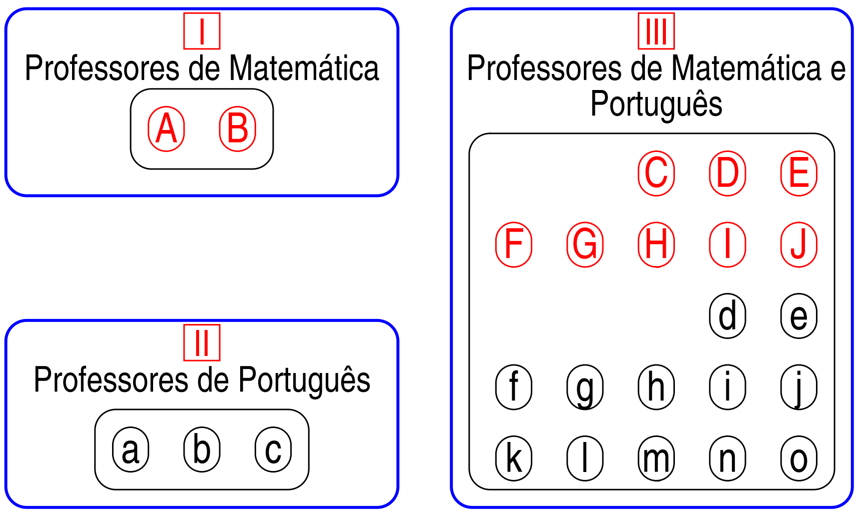
Exemplo 37 (continuação) O raciocínio foi:

I Nº de comissões com 2 professores de Matemática ×

II Nº de comissões com 3 professores de Português ×

III Nº de comissões com 2 professores dentre os restantes de Matemática e/ou Português

Um cenário da proposição anterior pode ser representado pelos seguintes conjuntos:



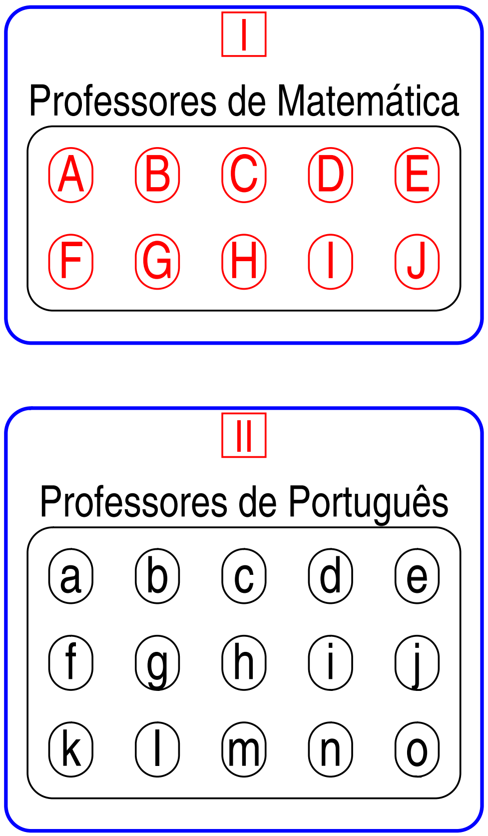

Neste cenário, temos no conjunto I os elementos A e B, no conjunto II os elementos a, b e c, e no conjunto III os elementos restantes.

Note que podemos escolher os professores de Matemática C e D como os elementos do conjunto III.

No entanto, existe outro cenário onde teremos no conjunto I os professores C e D e os professores A e B como os outros dois elementos do conjunto III. Se os elementos do conjunto II não mudaram então as comissões resultantes nos dois cenários acima são idênticas e, assim, estamos contando duas vezes a mesma comissão.

# Combinação

$\boxed{\text{Exemplo 37}}$ (continuação) Este problema pode ser resolvido da seguinte forma:




{Comissões com 4 professores de Matemática e 3 professores de Português}

$$\binom{10}{4} \cdot \binom{15}{3} +$$

{Comissões com 3 professores de Matemática e 4 professores de Português}

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{15}{4} +$$

{Comissões com 2 professores de Matemática e 5 professores de Português}

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{15}{5}$$

Nº total de comissões = 95 550 + 163 800 + 135 135 = 394 485.

# Combinação

$\boxed{\text{Exemplo 38}}$ Seja um baralho comum de 52 cartas que possui quatro naipes ($\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit$) de 13 denominações cada $(A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K)$.

(a) De quantas formas diferentes pode-se ter uma "mão de *poker*" (cinco cartas) todas do mesmo naipe?

– Uma "mão de *poker*" pode ser construída em dois passos sucessivos: selecione um naipe e, em seguida, escolha cinco cartas desse naipe. Pelo princípio da multiplicação temos:

$$4 \cdot C(13, 5) = 5\,148.$$

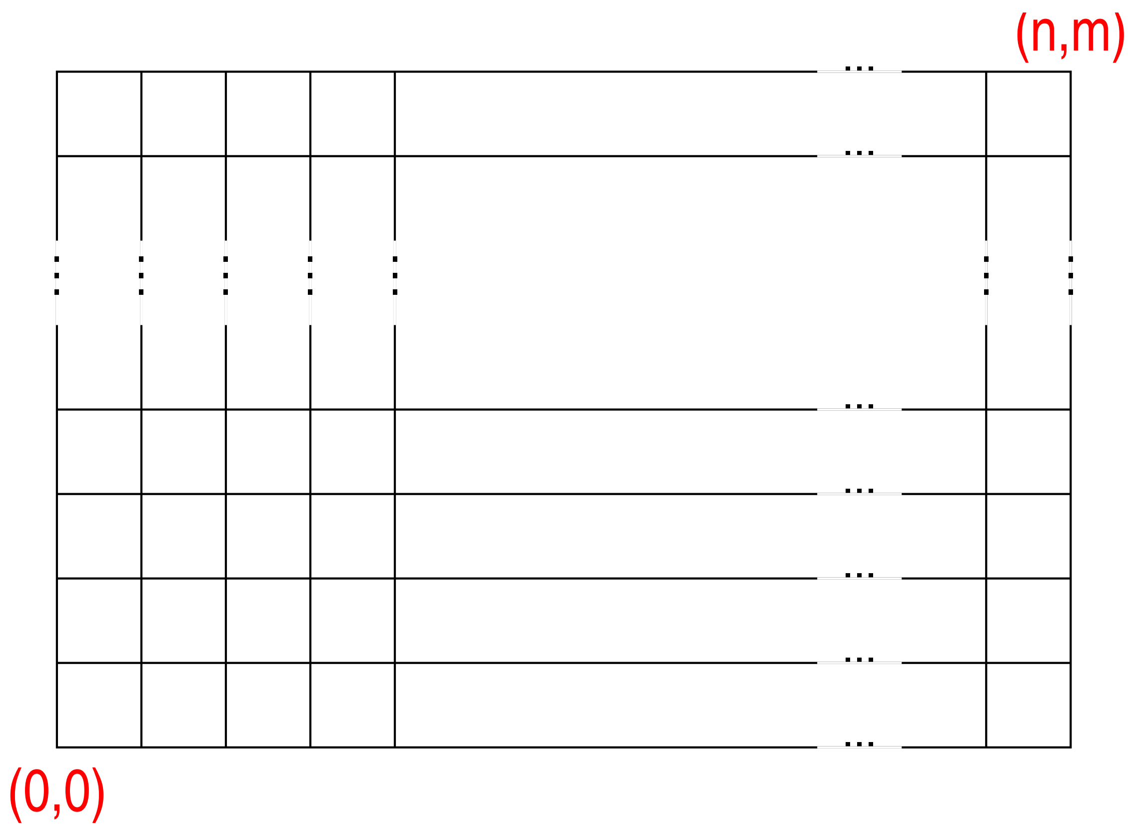
(b) De quantas formas diferentes pode-se ter uma "mão de *poker*" contendo três cartas de uma denominação e duas cartas de uma outra denominação?

– Essa "mão de *poker*" pode ser construída em quatro passos sucessivos: selecione a primeira denominação para as três cartas, selecione os três naipes dessa denominação, selecione a segunda denominação para as outras duas cartas, selecione os dois naipes dessa denominação. Pelo princípio da multiplicação temos:

$$13 \cdot C(4, 3) \cdot 12 \cdot C(4, 2) = 3\,744.$$

# Combinação

$\boxed{\text{Exemplo 39}}$ Dado um grid $n \times m$, quantas rotas (caminhos) existem entre a posição $(0, 0)$ (canto inferior esquerdo) até a posição $(n, m)$ (canto superior direito) se os únicos movimentos possíveis são mover para a direita (D) ou para cima (C)?



# Combinação

Exemplo 39 (continuação)

Cada rota pode ser expressa por uma sequência de D's e C's, sendo que existem exatamente $n$ D's e $m$ C's, ou seja, cada rota possui $n+m$ passos.

Posições dos movimentos:

$$\underset{1}{\underline{\qquad}} \quad \underset{2}{\underline{\qquad}} \quad \ldots \quad \underset{n+m}{\underline{\qquad}}$$

Observe que se escolhermos as posições para os movimentos D's as outras posições devem ser preenchidas com movimentos C's e vice-versa. Assim, temos $n+m$ posições a serem preenchidas sendo que $n$ delas com movimentos D's. Observe que não estamos interessados numa dada ordem mas sim no conjunto de posições que irão ter o movimento $D$. Logo, a quantidade de rotas que satisfaz as restrições de movimentos é dada por

$$\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!m!},$$

que é o mesmo valor de

$$\binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{m!n!}$$

se os movimentos C's forem escolhidos.

# Combinação

$\boxed{\text{Exemplo 40}}$ Quantos strings de 8 bits existem que possuem exatamente três bits 1's?

Posições que os bits 1's podem ser colocados:

| ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

Observe que:

– Não estamos interessados numa ordem.

– Uma vez escolhido um subconjunto de três posições contendo bits 1's de um conjunto de oito posições, as posições restantes devem ter o bit 0.

– Logo, este problema é equivalente a contar o número de subconjuntos de três posições escolhidos de um conjunto de oito posições.

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$$

# Combinação

$\boxed{\text{Exemplo 41}}$ Considere formas de ordenar as letras da palavra `MISSISSIPPI`. Por exemplo:

`IIMSSPISSIP`      `ISSSPMIIPIS`      `PIMISSSSIIP`

Quantos strings distintos existem?

Posições que as letras podem ser colocadas:

| ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |

# Combinação

Exemplo 41 Observe que:

- Este exemplo generaliza o anterior.
- Cópias de uma mesma letra não podem ser distinguidas.
- Uma vez escolhidas as posições para uma certa letra, as cópias dessa letra podem ir em qualquer posição.
- Assim, construir uma ordem para as letras pode ser visto como um processo formado de quatro etapas:
  - Escolher um subconjunto de quatro posições para a letra `S`.
  - Escolher um subconjunto de quatro posições para a letra `I`.
  - Escolher um subconjunto de duas posições para a letra `P`.
  - Escolher um subconjunto de uma posição para a letra `M`.

# Combinação

Exemplo 41

Observe que:

– Existem 11 posições e $C(11, 4)$ subconjuntos de quatro posições para a letra `S`.
– Existem sete posições restantes e $C(7, 4)$ subconjuntos de quatro posições para a letra `I`.
– Existem três posições restantes e $C(3, 2)$ subconjuntos de duas posições para a letra `P`.
– Finalmente, existe apenas uma posição restante para a letra `M`.

Assim, pelo princípio da multiplicação temos:

$$\binom{11}{4} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{11!}{4!7!} \cdot \frac{7!}{4!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!} = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = 34650$$

# Combinação: Teorema

Suponha uma coleção formada por $n$ objetos dos quais:

– $n_1$ são do tipo 1 e não podem ser distinguidos;

– $n_2$ são do tipo 2 e não podem ser distinguidos;

– $\ldots$

– $n_k$ são do tipo $k$ e não podem ser distinguidos;

sendo que $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Assim, o número de permutações distintas dos $n$ objetos é:

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}{n_k} =$$

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots n_k!}$$

# Combinação com repetição

- Quantas formas existem de escolher $r$ elementos sem considerar a ordem de um conjunto de $n$ elementos se repetição é permitida?

- Estratégia:
  - Considere cada um dos $n$ elementos como uma categoria de objeto do qual várias seleções podem ser feitos.

- Exemplo: suponha um conjunto com os elementos $\{1, 2, 3, 4\}$. Se três elementos devem ser escolhidos, então podemos ter:
  - $[3, 3, 1], [2, 2, 1], [1, 2, 4], \ldots$

- Como a ordem não importa, temos que $[3, 3, 1] = [3, 1, 3] = [1, 3, 3]$.

# Combinação com repetição

Definição: Uma combinação de $r$ elementos com repetição permitida, ou multiconjunto de tamanho $r$, escolhida de um conjunto $X$ de $n$ elementos é uma seleção não ordenada de elementos de $X$ com repetição permitida.

Se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, escreve-se uma combinação de $r$ elementos com repetição permitida, ou multiconjunto de tamanho $r$, como

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}]$$

tal que $x_{i_j} \in X$ e algum $x_{i_j}$ pode ser igual a um outro elemento.

# Combinação com repetição

$\boxed{\text{Exemplo 42}}$ Seja o conjunto $X$ com os elementos $\{1, 2, 3, 4\}$. Liste todas as combinações de 3 elementos com repetição permitida.

| | |
|---|---|
| $[1, 1, 1]$ $[1, 1, 2]$ $[1, 1, 3]$ $[1, 1, 4]$ | Todas as combinações que incluem 1,1 |
| $[1, 2, 2]$ $[1, 2, 3]$ $[1, 2, 4]$ | Todas as combinações que incluem 1,2 |
| $[1, 3, 3]$ $[1, 3, 4]$ | Todas as combinações que incluem 1,3 |
| $[1, 4, 4]$ | Todas as combinações que incluem 1,4 |
| $[2, 2, 2]$ $[2, 2, 3]$ $[2, 2, 4]$ | Todas as combinações que incluem 2,2 |
| $[2, 3, 3]$ $[2, 3, 4]$ | Todas as combinações que incluem 2,3 |
| $[2, 4, 4]$ | Todas as combinações que incluem 2,4 |
| $[3, 3, 3]$ $[3, 3, 4]$ | Todas as combinações que incluem 3,3 |
| $[3, 4, 4]$ | Todas as combinações que incluem 3,4 |
| $[4, 4, 4]$ | Todas as combinações que incluem 4,4 |

Ou seja, existem 20 combinações de três elementos com repetição permitida.

# Combinação com repetição

Codificando os resultados de uma combinação de $r$ elementos com repetição permitida de um conjunto de $n$ elementos.

Algumas combinações:

| Categoria 1 | | Categoria 2 | | Categoria 3 | | Categoria 4 | Resultado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\vert$ | $\times$ | $\vert$ | | $\vert$ | $\times\times$ | $[2,4,4]$ |
| $\times$ | $\vert$ | | $\vert$ | $\times$ | $\vert$ | $\times$ | $[1,3,4]$ |
| $\times\times\times$ | $\vert$ | | $\vert$ | | $\vert$ | | $[1,1,1]$ |

# Combinação com repetição

- Cada seleção de $n$ elementos (categorias) pode ser representada por um string formado pelos símbolos $|$ e $\times$.
- Existem $r$ símbolos $\times$ e $n-1$ símbolos $|$.
- Resolver o problema de contar o número de combinações de $r$ elementos com repetição permitida de um conjunto de $n$ elementos é equivalente a determinar o número de combinações de $r$ elementos de um conjunto de $(n-1)+r$ símbolos, ou seja,

$$\binom{r+n-1}{r}$$

# Combinação com repetição

$\boxed{\text{Exemplo 43}}$ Uma pessoa quer comprar 15 latas de refrigerante de cinco marcas diferentes. Quantas combinações de latas podem ser feitas?

Neste caso temos $r = 15$ e $n = 5$. Assim temos

$$\binom{r+n-1}{r} = \binom{15+5-1}{15} = \binom{19}{15} = \frac{19!}{15! \cdot 4!} = 3876$$

# Combinação com repetição

Exemplo 44 Considere o mesmo exemplo anterior, mas a pessoa deseja levar pelo menos seis latas do refrigerante *Guaraná da Amazônia*. Quantas combinações de latas podem ser feitas?

Observe que:

– A pessoa precisa escolher mais nove latas das cinco restantes.

– Em cada combinação, estarão presentes as seis latas de *Guaraná da Amazônia*.

– Assim, temos $r = 9$ e $n = 5$

$$\binom{r+n-1}{r} = \binom{9+5-1}{9} = \binom{13}{9} = \frac{13!}{9! \cdot 4!} = 715$$

# Combinação com repetição

$\boxed{\text{Exemplo 45}}$ Seja $n$ um inteiro positivo. Quantas triplas de inteiros $(i, j, k)$ existem sendo que $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$?

Observe que:

– Qualquer tripla de inteiros $(i, j, k)$ com $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$ pode ser representada por um string de $n-1$ símbolos | já que existem $n$ categorias para serem escolhidas ($n$ números inteiros) e três símbolos $\times$ que são os três números da tripla, e as suas posições indicam quais são esses três números.

– A garantia da restrição $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$ é obtida simplesmente fazendo uma leitura da esquerda para a direita. Exemplo para $n = 5$:

| Categoria | | | | | | | | | Resultado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | \| | 2 | \| | 3 | \| | 4 | \| | 5 | |
| $\times$ | \| | $\times$ | \| | | \| | $\times$ | \| | | (1,2,4) |
| | \| | | \| | $\times\times$ | \| | | \| | $\times$ | (3,3,5) |

# Combinação com repetição

$\boxed{\text{Exemplo 45}}$ Assim, o número de triplas é o mesmo número de strings de $n-1$ símbolos $|$ e três símbolos $\times$, e é dado por:

$$
\begin{aligned}
\binom{3+(n-1)}{3} &= \binom{n+2}{3} \\
&= \frac{(n+2)!}{3!\cdot(n+2-3)!} \\
&= \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{3!\cdot(n-1)!} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}
\end{aligned}
$$

# Sumário

| | | ORDEM | |
|---|---|---|---|
| | | SIM | NÃO |
| REPETIÇÃO | SIM | $n^r$ | $\binom{n+r-1}{r}$ |
| | NÃO | $P(n,r)$ | $\binom{n}{r}$ |

# Álgebra de combinações

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$

➜ Um conjunto com $n$ elementos só possui um subconjunto de tamanho $n$, que é ele próprio.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$$

➜ Um conjunto com $n$ elementos só possui um subconjunto de tamanho 0, que é o conjunto vazio.

# Álgebra de combinações

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \forall n, r | 0 < r \leq n$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

- A quantidade de subconjuntos de tamanho $r$ e de tamanho $n-r$ é a mesma.
- Isto significa que cada subconjunto de $C(n, r)$ pode ser associado a cada subconjunto de $C(n, n-r)$.
- Raciocínio combinatorial onde o resultado é obtido contando objetos que são combinados de formas diferentes. Este raciocínio é diferente de uma prova algébrica.

# Fórmula de Pascal

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

onde, $0 < r \leq n$.

# Fórmula de Pascal

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n![r!(n-r)!] + n![(r-1)!(n-r+1)!]}{r!(n-r+1)!(r-1)!(n-r)!} \\
&= \frac{n!r!(n-r)! + n!(r-1)!(n-r+1)!}{r!(n-r+1)!(r-1)!(n-r)!} \\
&= \frac{n!r(r-1)!(n-r)! + n!(r-1)!(n-r+1)(n-r)!}{r!(n-r+1)!(r-1)!(n-r)!} \\
&= \frac{n!r + n!(n-r+1)}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{n!(r+n-r+1)}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \\
&= \binom{n+1}{r}
\end{aligned}
$$

# Fórmula de Pascal
# Outra estratégia de correção

Fórmula de Pascal:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}.$$

Obviamente temos que

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!r!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-(r-1))!(r-1)!}.$$

Ao invés de multiplicar cada fração pelo denominador da outra, existe um caminho mais fácil: multiplicar o numerador e o denominador da primeira por $(n-r)$, e da segunda por $r$. Os dois denominadores resultam em $(n-r)!r!$, e a soma dos numeradores torna-se mais fácil.