

Linguagens formais e autômatos

Propriedades de linguagens regulares

Gabriel V C Candido
gabriel.candido@ifpr.edu.br

Instituto Federal do Paraná - Pinhais

Sumário

Propriedades de linguagens regulares

Lema do bombeamento

Sumário

Propriedades de linguagens regulares

Lema do bombeamento

Teorema de Kleene

Teorema

Uma linguagem L é aceita por um AFD com alfabeto Σ se, e somente se, L é um conjunto regular sobre Σ .

Nos permite escolher qual formalismo trabalhar: AFD ou ER ou CR, pois são todos equivalentes.



Operações principais

Teorema

Sejam L_1 e L_2 duas linguagens regulares sobre Σ .
Então as linguagens $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$, L_1^* são regulares.

Operações principais

Teorema

Seja L uma linguagem regular sobre Σ . Então $\bar{L}$ é regular.

Basta inverter quem são os estados finais e não finais do AFD.



Operações principais

Teorema

Sejam L_1 e L_2 duas linguagens regulares sobre Σ .
Então a linguagem $L_1 \cap L_2$ é regular.

Basta usar DeMorgan: $L_1 \cap L_2 = \overline{(\overline{L_1} \cup \overline{L_2})}$

Exemplo 1

- ▶ $L_1 : a(a + b)^*$, começa com a ;
- ▶ $L_2 : (a + b)^*b$, termina com b ;
- ▶ L_3 : número par de as e bs .

A linguagem $L = (\{a\}\{a, b\}^*) \cup (\{a, b\}^*\{b\}) \cap L_3$ é regular? É possível construir um AFD para ela?

Sim, pois $L = L_1 \cup L_2 \cap L_3$ só usa operações que, como vimos, preservam a regularidade.

Exemplo 2

Queremos provar que a linguagem sobre $\{a, b\}$ de palavras que contêm aa mas não contêm bb é regular.

► $L_1 : (a + b)^* aa(a + b)^*$

► $L_2 : (a + b)^* bb(a + b)^*$

$$L = L_1 \cap \overline{L_2}$$



Mais teorema

Teorema

Sejam um AFD M de k estados e $z \in L(M)$ tal que $|z| \geq k$. Então existem palavras u, v, w tais que:

- ▶ $z = uvw$
- ▶ $v \neq \lambda$
- ▶ $uv^i w \in L(M), \forall i \geq 0$

A computação de z percorre um ciclo! Basta escolher $z = uvw$ onde v é a subpalavra que é conseguida ao se percorrer o ciclo.

Mais teorema, de novo

Teorema

Existem procedimentos de decisão para saber se, dado qualquer AFD M ,

- ▶ $L(M) = \emptyset$
- ▶ $L(M)$ é finita
- ▶ $L(M)$ é infinita

Podemos minimizar o AFD e:

- ▶ Verificar se só possui um estado, que não é final;
- ▶ Verificar se o grafo possui ciclos ou não.

Sumário

Propriedades de linguagens regulares

Lema do bombeamento

Motivação

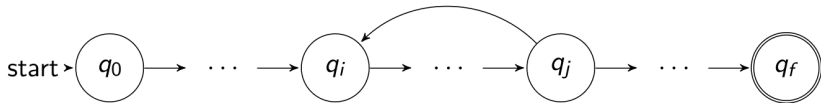


Figura: Fonte: Prof. Castilho (UFPR)

- ▶ Sejam $u, v, w \in \Sigma^*$ tais que:
 - ▶ u é processada de q_0 até q_i ;
 - ▶ v é processada de q_j até q_j , usando a aresta de retorno;
 - ▶ u é processada de q_j até q_f .
- ▶ $uw \in L(M)$
- ▶ $uvw \in L(M)$
- ▶ $uv^2w \in L(M)$
- ▶ $\dots$
- ▶ $uv^i w \in L(M), \forall i \geq 0$

Lema do bombeamento (*Pumping lemma*)

Teorema

Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante $k > 0$ tal que, para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$, existem u, v, w que satisfazem as seguintes condições:

- ▶ $z = uvw$ (ver motivação)
- ▶ $|uv| \leq k$
- ▶ $v \neq \lambda$ (existência do ciclo)
- ▶ $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$

Lema do bombeamento (*Pumping lemma*)

Esse teorema parte de uma LR e garante que, se pegarmos uma palavra maior que k , então existe um laço.

Vamos usar o teorema para mostrar que uma linguagem **não é** regular!

Contrapositiva: $a \rightarrow b = \neg b \rightarrow \neg a$

Exemplo 3

Provar que $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

Exemplo 3

Provar que $L = \{a^n b^n | n \in N\}$ não é regular.

Suponha que L é regular.

Exemplo 3

Provar que $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento.



Exemplo 3

Provar que $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento.

Agora precisamos escolher uma palavra com tamanho maior que k . Vamos trabalhar em função de k , pois não sabemos o valor de k (o lema garante que existe, mas não sabemos qual é).

Exemplo 3

O lema diz que precisamos de $|z| \geq k$.

- ▶ $z = a^{k-1}b, |z| = k$, mas $z \notin L$
- ▶ $z = a^{k/2}b^{k/2}, |z| = k$, mas $z \notin L$
- ▶ $z = a^k b^k, |z| = 2k > k$, e $z \in L$!

A escolha de z é importante!

Exemplo 3

Provar que $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento.



Exemplo 3

Provar que $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento. Seja $z = a^k b^k$. Note que $|z| > k$.



Exemplo 3

Provar que $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento. Seja $z = a^k b^k$. Note que $|z| > k$.

Olhando a palavra mais de perto:
 $aaa \dots aaabbb \dots bbb$.

- ▶ O lema diz que $|uv| \leq k$;
- ▶ u pode ser λ ;
- ▶ O lema diz que $v \neq \lambda$. Portanto, $|v| \geq 1$!



Exemplo 3

Provar que $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento. Seja $z = a^k b^k$. Note que $|z| > k$.

Exemplo 3

Provar que $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento. Seja $z = a^k b^k$. Note que $|z| > k$.

O lema nos diz:

- ▶ $z = uvw$
- ▶ $|uv| \leq k$ (já observamos que v só contém a s)
- ▶ $v \neq \lambda$
- ▶ $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$ (vamos usar isso agora!)

Exemplo 3

Provar que $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento. Seja $z = a^k b^k$. Note que $|z| > k$.

- ▶ $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$: o objetivo agora é chegar em um absurdo/contradição.

Exemplo 3

Provar que $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento. Seja $z = a^k b^k$. Note que $|z| > k$.

- ▶ uv^2w : $|uv^2w| = |uvvw| = |u| + |v| + |v| + |w| = |uvw| + |v|$, mas o tamanho a mais só possui as !
- ▶ Então teremos uma palavra da forma $a^{k+|v|}b^k$. Como $v \neq \lambda$, $|v| \geq 1$, então $uv^2w \notin L$.

Portanto, L não é regular!

Exemplo 3

Provar que $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento. Seja $z = a^k b^k$. Note que $|z| > k$. O lema diz que:

- ▶ $z = uvw$
- ▶ $|uv| \leq k$
- ▶ $v \neq \lambda$
- ▶ $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$

Mas v só tem a 's, pois $|uv| \leq k$. Além disso, como $v \neq \lambda$, v contém pelo menos um a . Logo, $uv^2 w = a^{k+|v|} b^k \notin L$, o que é um absurdo.

Portanto, L não é regular!

Técnica para usar o lema

Provar que L não é regular.

1. A prova sempre será por redução ao absurdo;
2. Suponha que L seja regular;
3. Escolha uma palavra $z \in L$ cujo tamanho seja maior ou igual a k , a constante do lema;
4. Mostrar que, sempre que se decompõe $z = uvw$, existe um i tal que $uv^i w \notin L$.

Exemplo 4

$L = \{0^m 1^n \mid m > n\}$ é ou não regular?

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento.



Exemplo 4

$L = \{0^m 1^n \mid m > n\}$ é ou não regular?

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento. Seja $z = 0^{k+1}1^k$. Note que $|z| \geq k$ e $z \in L$. O lema diz que:

- ▶ $z = uvw$
- ▶ $|uv| \leq k$
- ▶ $v \neq \lambda$
- ▶ $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$

Então v só tem 0's, pois $|uv| \leq k$. Além disso, como $v \neq \lambda$, v contém pelo menos um 0. Logo, $uv^0 w = 0^{k+1-|v|}1^k \notin L$, pois $|v| \geq 1$. Mas isto é uma contradição.

Portanto, L não é regular!

Exemplo 5

$L = \{a^n | n \text{ é primo}\}$ é ou não regular?

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento.



Exemplo 5

$L = \{a^n | n \text{ é primo}\}$ é ou não regular?

Suponha que L é regular. Seja $k > 0$ a constante do lema do bombeamento. Seja $z = a^n$ tal que n é um número primo maior que k . Note que $|z| > k$ e $z \in L$. O lema diz que:

- ▶ $z = uvw$
- ▶ $|uv| \leq k$
- ▶ $v \neq \lambda$
- ▶ $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$

Exemplo 5

Temos que achar um i que quebre o lema, ou seja, a palavra resultante possui um tamanho que não é primo. Vamos usar $n + 1$ (n é o próximo primo depois de k):

$$\blacktriangleright |uv^{n+1}w| = |uvv^n w| = |uvw| + |v^n|$$

Exemplo 5

Temos que achar um i que quebre o lema, ou seja, a palavra resultante possui um tamanho que não é primo. Vamos usar $n + 1$ (n é o próximo primo depois de k):

- ▶ $|uv^{n+1}w| = |uvv^n w| = |uvw| + |v^n|$
- ▶ Como $|z| = n$ e $uvw = z$, então $|uvw| = n$

Exemplo 5

Temos que achar um i que quebre o lema, ou seja, a palavra resultante possui um tamanho que não é primo. Vamos usar $n + 1$ (n é o próximo primo depois de k):

- ▶ $|uv^{n+1}w| = |uvv^n w| = |uvw| + |v^n|$
- ▶ Como $|z| = n$ e $uvw = z$, então $|uvw| = n$
- ▶ Como $|v^n| = n * |v|$,
então $|uv^{n+1}w| = n + n * |v|$

Exemplo 5

Temos que achar um i que quebre o lema, ou seja, a palavra resultante possui um tamanho que não é primo. Vamos usar $n + 1$ (n é o próximo primo depois de k):

- ▶ $|uv^{n+1}w| = |uvv^n w| = |uvw| + |v^n|$
- ▶ Como $|z| = n$ e $uvw = z$, então $|uvw| = n$
- ▶ Como $|v^n| = n * |v|$,
então $|uv^{n+1}w| = n + n * |v|$
- ▶ $|uv^{n+1}w| = n * (1 + |v|)$

Exemplo 5

Temos que achar um i que quebre o lema, ou seja, a palavra resultante possui um tamanho que não é primo. Vamos usar $n + 1$ (n é o próximo primo depois de k):

- ▶ $|uv^{n+1}w| = |uvv^n w| = |uvw| + |v^n|$
- ▶ Como $|z| = n$ e $uvw = z$, então $|uvw| = n$
- ▶ Como $|v^n| = n * |v|$,
então $|uv^{n+1}w| = n + n * |v|$
- ▶ $|uv^{n+1}w| = n * (1 + |v|)$

Como $|v| > 0$, então $n * (1 + |v|)$ não pode ser primo. Logo, $uv^{n+1}w \notin L$, o que é um absurdo.

Portanto, L não é regular!