Linguagens formais e autômatos

Autômatos finitos determinísticos

Gabriel V C Candido
gabriel.candido@ifpr.edu.br

Instituto Federal do Paraná - Pinhais

INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

Sumário

INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

Sumário

Das aulas anteriores ...

- Noções intuitivas sobre máquinas de estados finitos;
- Linguagens: definição recursiva;
- Linguagens regulares: especificação finita;
- Linguagens regulares: como enumerar e gerar as palavras da linguagem;
- Linguagens regulares: operações sobre conjuntos $(*, +, uv)$;
- Linguagens regulares: podem ser *representadas* por expressões regulares;

Autômatos finitos

Nosso objetivo agora é determinar quando uma palavra está em uma linguagem.

Usaremos um modelo de máquina abstrato para "computar" a entrada e dizer SIM ou NÃO.

Máquinas de estados finitos

A ideia é estudar o processo de computação de forma independente do hardware.

Nosso primeiro modelo não tem memória.

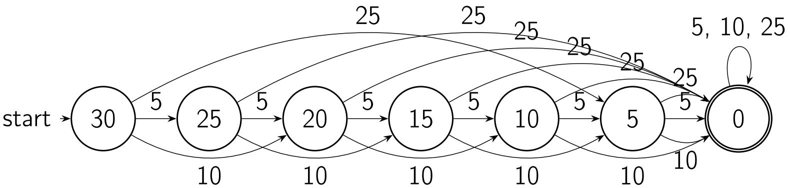
Exemplo 1

Máquina de jornal

- Entrada: moedas de 5, 10 e 25 centavos;
- Saída: libera o jornal quando 30 centavos ou mais tiverem sido depositados;
- Estados:
    - Faltam 30;
    - Faltam 25;
    - Faltam 20;
    - Faltam 15;
    - Faltam 10;
    - Faltam 5;
    - Faltam 0;
- Transições: a máquina muda de estado a cada moeda inserida;
- Inicialmente faltam 30 centavos.

Exemplo 1

Máquina de jornal: diagrama de estados



Símbolos indivisíveis do alfabeto: $\Sigma = \{5, 10, 25\}$.

Sem memória: suponha que a máquina está no estado 20; a máquina não sabe como chegou ali.

Convenções

Diagrama de estados

- Um grafo dirigido rotulado representa a máquina;
- Os nós são estados e as arestas são transições;
- O estado inicial é representado por uma flecha entrando;
- O estado final é representado por um círculo duplo;

Sumário

Autômatos finitos determinísticos

Autômatos finitos determinísticos (AFD)

Autômatos finitos determinísticos (AFD)

Definição

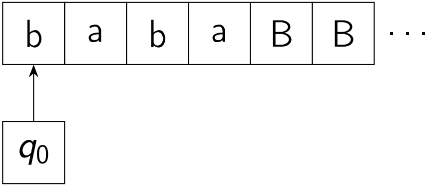
Um *autômato finito determinístico (AFD)* é uma quíntupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde:

- Q: conjunto finito de estados;
- Σ: alfabeto, conjunto finito de símbolos;
- $q_0 \in Q$: é o estado inicial;
- $F \subseteq Q$: é conjunto de estados finais;
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$: é a função total de transição.

Composição do AFD

- Uma máquina com um único registrador, que armazena o estado atual;
- Um cabeçote pode ler um símbolo de uma fita de entrada e se mover para a direita;
- Uma fita de entrada, infinita, que contém células que podem conter um único símbolo cada;
- Inicialmente, a palavra a ser processada é colocada na fita, um símbolo em cada célula;
- O cabeçote está posiciionado na primeira célula da fita, e a máquina está no estado inicial.

Composição do AFD



A cada símbolo lido pelo cabeçote, ele se move à direita e a máquina muda de estado de acordo com δ.

Este processo se repete até o cabeçote encontrar um símbolo em branco.

Neste ponto, a máquina verifica o seu estado e aceita ou rejeita a palavra.

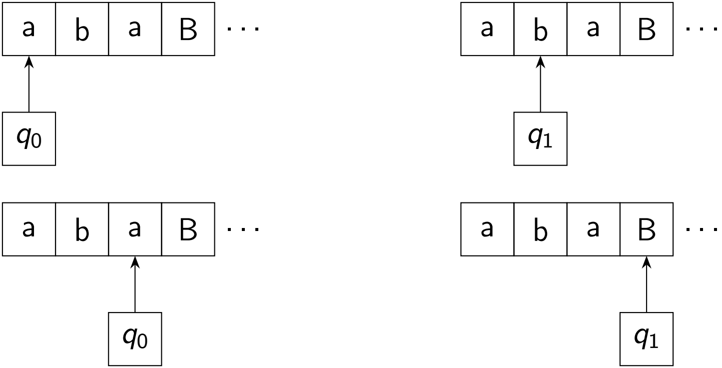
Exemplo 2

$$M : Q = \{q_0, q_1\}; \Sigma = \{a, b\}; F = \{q_1\};$$
$$\delta(q_0, a) = q_1; \delta(q_0, b) = q_0; \delta(q_1, a) = q_1; \delta(q_1, b) = q_0;$$

δ	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_0

Exemplo 2

$$M : Q = \{q_0, q_1\}; \Sigma = \{a, b\}; F = \{q_1\};$$
$$\delta(q_0, a) = q_1; \delta(q_0, b) = q_0; \delta(q_1, a) = q_1; \delta(q_1, b) = q_0;$$



Como $q_1 \in F$, então *aba* é aceita por este AFD.

INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

Linguagem da máquina

Definição

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD. Então a linguagem de M, $L(M)$, é o conjunto de palavras em Σ^* aceitas por M.

Um AFD é um reconhecedor de linguagens!

Dois AFD's que aceitam a mesma linguagem são equivalentes.

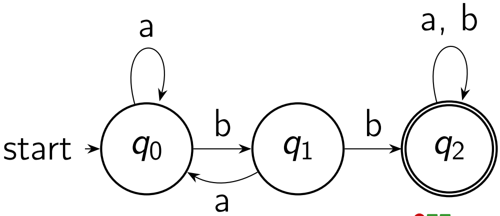
Exemplo 3

Um AFD que aceita o conjunto de palavras sobre $\{a, b\}$ que contêm a subpalavra bb.

$L(M) = (a + b)^* bb(a + b)^*$.

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}; \Sigma = \{a, b\}; F = \{q_2\};$$
$$M(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
q_2	q_2	q_2



INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

Função de transição estendida

A função de transição δ só nos permite consumir um símbolo da fita.

Mas, para qualquer palavra, só existe um estado do AFD que pode ser alcançado a partir do estado inicial.

Então podemos definir a *função de transição estendida*, que nos permite processar palavras.

Função de transição estendida

Definição

Seja um AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. A função de transição estendida, $\hat{\delta}$, é uma função de $Q \times \Sigma^* \to Q$, definida recursivamente assim:

- **BASE:** $\hat{\delta}(e, \lambda) = e$;

Função de transição estendida

Definição

Seja um AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. A função de transição estendida, $\hat{\delta}$, é uma função de $Q \times \Sigma^* \to Q$, definida recursivamente assim:

- **BASE:** $\hat{\delta}(e, \lambda) = e$;
- **PASSO:** $\hat{\delta}(e, ay) = \hat{\delta}(\delta(e, a), y)$, para todo $a \in \Sigma, y \in \Sigma^*$;

INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

Linguagem do autômato

Definição

A linguagem reconhecida (aceita) por um um AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ é o conjunto $L(M) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$. Uma palavra $w \in \Sigma^*$ é dita ser reconhecida, ou aceita, por M se e somente se $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$.

Implementação

Como implementar $\hat{\delta}$?

Qualquer paradigma de programação!

Exemplo 4

Um AFD para reconhecer constantes reais de linguagens de programação.

Exemplo 4

Um AFD para reconhecer constantes reais de linguagens de programação.

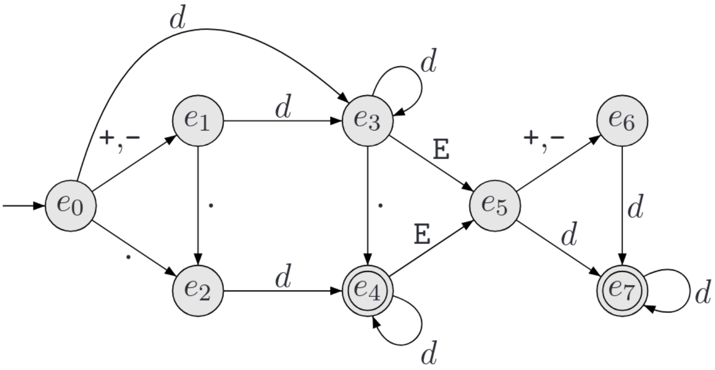


Figura: Fonte: NV 2.2

Exemplo 4

Um AFD para reconhecer constantes reais de linguagens de programação.

Matematicamente:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, x\}$
- $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ., +, -, E\}$
- $F = \{q_4, q_7\}$

INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

Exemplo 4

Um AFD para reconhecer constantes reais de linguagens de programação.

δ	d	$.$	$+$	$-$	E
q_0	q_3	q_2	q_1	q_1	x
q_1	q_3	q_2	x	x	x
q_2	q_4	x	x	x	x
q_3	q_3	q_4	x	x	q_5
q_4	q_4	x	x	x	q_5
q_5	q_7	x	q_6	q_6	x
q_6	q_7	x	x	x	x
q_7	q_7	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x

Função de transição é total!

Note que precisamos definir δ para **todos** os pares $Q \times \Sigma$!

O correto é adicionar um estado de erro (nesse caso, x) e fazer adicionar a transição para x sempre que não haja transição de e para algum estado sob a $(e \in Q, a \in \Sigma)$.

Exemplo 4

Um AFD para reconhecer constantes reais de linguagens de programação.

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

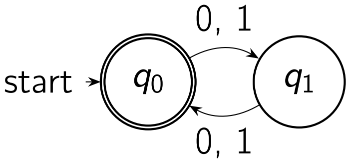
Exemplo 5

$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* | w \text{tem um número par de símbolos}\}.$

Exemplo 5

$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* | w \text{tem um número par de símbolos}\}.$

$$M = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$$



INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

Exemplo 6

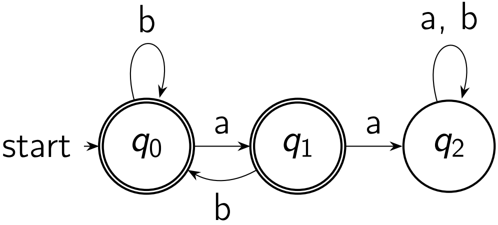
$(b + ab)^*(a + \lambda)$, das palavras sobre $\{a, b\}$ que não contêm aa.

Exemplo 6

$(b + ab)^*(a + \lambda)$, das palavras sobre $\{a, b\}$ que não contêm aa.

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1\})$$

δ	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_2	q_2



INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

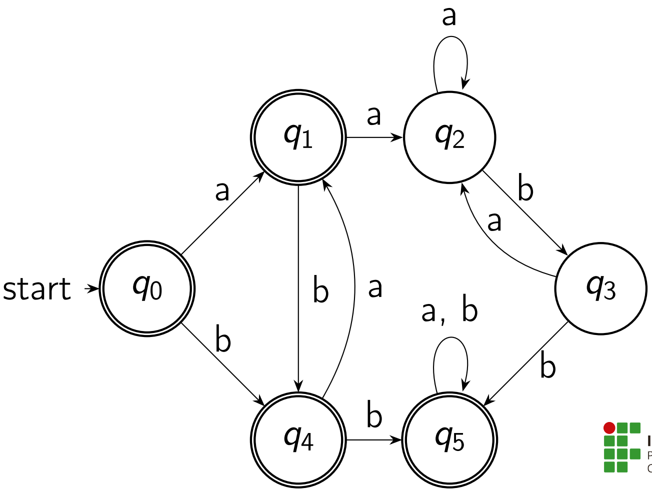
Exemplo 7

$(a+b)^*bb(a+b)^* + (b+ab)^*(a+\lambda)$, das palavras sobre $\{a, b\}$ que contêm bb ou não contêm aa.

Exemplo 7

$(a+b)^*bb(a+b)^* + (b+ab)^*(a+\lambda)$, das palavras sobre $\{a, b\}$ que contêm bb ou não contêm aa.

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1\})$$

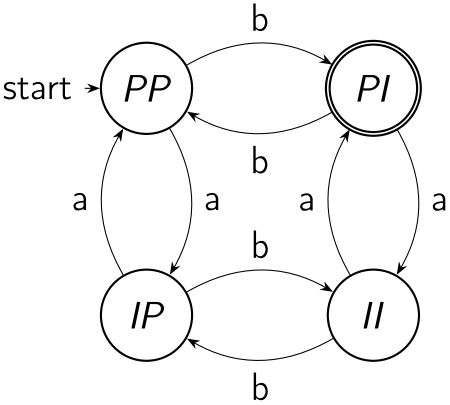


Exemplo 8

Palavras sobre $\{a, b\}$ que contêm um número par de a's e um número ímpar de b's.

Exemplo 8

Palavras sobre $\{a, b\}$ que contêm um número par de a's e um número ímpar de b's.



INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

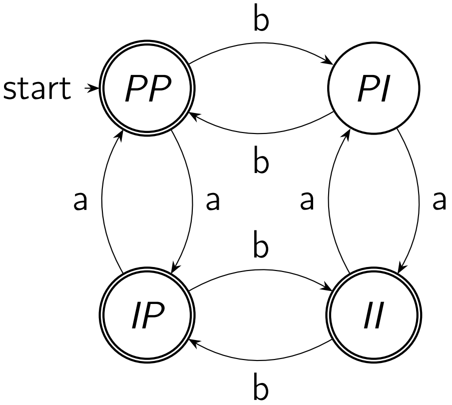
Exemplo 9

Palavras sobre $\{a, b\}$ que não contêm um número par de a's e um número ímpar de b's.

INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

Exemplo 9

Palavras sobre $\{a, b\}$ que não contêm um número par de a's e um número ímpar de b's.



INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

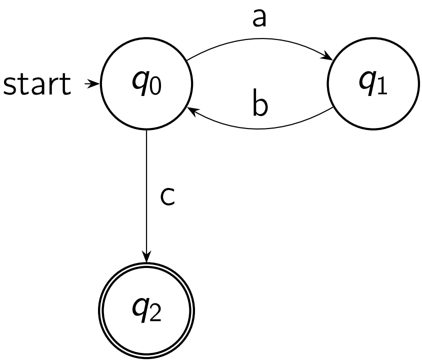
Complemento

Teorema

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD. Então $M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$ é um AFD com $L(M') = \Sigma^* - L(M)$.

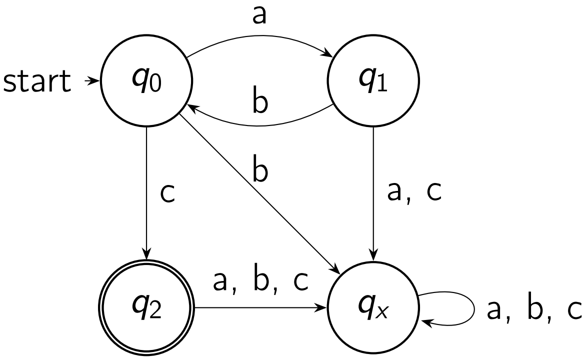
Determinismo incompleto

- Cada configuração tem no máximo uma ação especificada.
- A função de transição é parcial de $Q \times \Sigma$ em Q.
- A computação falha quando a máquina não consegue processar a palavra, rejeitando-a.

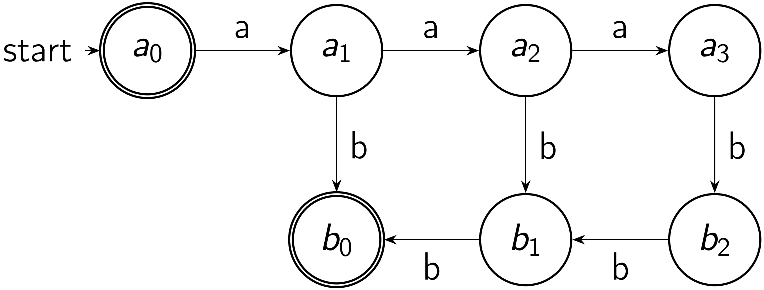


Determinismo incompleto

Podemos completar o autômato com um estado de erro e as transições que faltam.

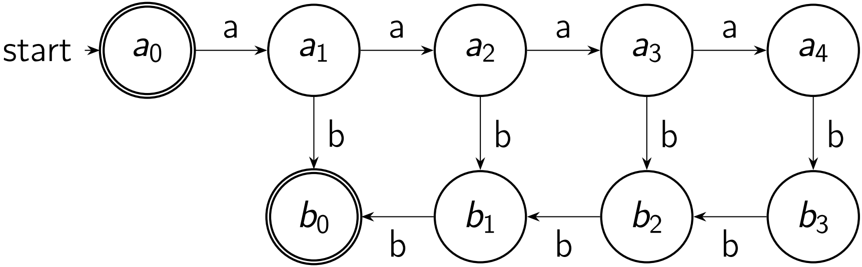


Exemplo 10



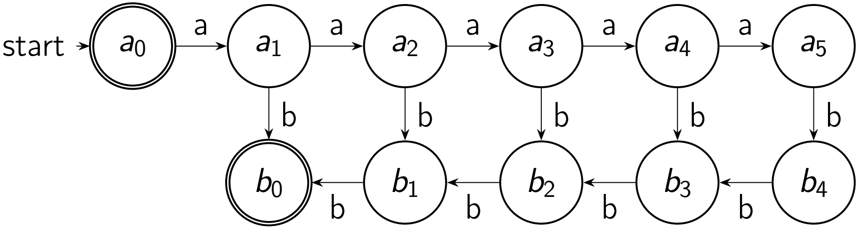
Este AFD aceita a linguagem $\{a^n b^n | n \leq 3\}$.

Exemplo 10 + 1



Este AFD aceita a linguagem $\{a^n b^n | n \leq 4\}$.

Exemplo 10 + 2



Este AFD aceita a linguagem $\{a^n b^n | n \leq 5\}$.

INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

Atenção!

- Se n for fixo, é possível construir um AFD que reconhece a linguagem;
- Mas não existe AFD que aceite a linguagem $\{a^n b^n | n \geq 0\}$!