Linguagens formais e autômatos

Linguagens regulares

Gabriel V C Candido
gabriel.candido@ifpr.edu.br

Instituto Federal do Paraná - Pinhais

INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

Sumário

Especificação finita de linguagens

Operações sobre conjuntos

Linguagens regulares

Expressões regulares

INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

Sumário

Especificação finita de linguagens

Operações sobre conjuntos

Linguagens regulares

Expressões regulares

Especificação finita de linguagens

Relembrando: linguagens interessantes têm alguma propriedade (Σ^* ou $\emptyset$ não são interessantes)

Para especificar linguagens, podemos:

- Descrever todos os elementos: impossível para linguagens infinitas
- Usar definições recursivas para linguagens simples

Exemplo 1

A linguagem L das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ onde as palavras começam com um a e têm tamanho par.

Exemplo 1

A linguagem L das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ onde as palavras começam com um a e têm tamanho par.

- **BASE:** $aa, ab \in L$

Exemplo 1

A linguagem L das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ onde as palavras começam com um a e têm tamanho par.

- **BASE:** $aa, ab \in L$
- **PASSO RECURSIVO:** Se $u \in L$ então $uaa, uab, uba, ubb \in L$

Exemplo 1

A linguagem L das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ onde as palavras começam com um a e têm tamanho par.

- **BASE:** $aa, ab \in L$
- **PASSO RECURSIVO:** Se $u \in L$ então $uaa, uab, uba, ubb \in L$
- **FECHO:** Só podem pertencer à L as palavras obtidas a partir da base com um número finito de aplicações do passo recursivo.

Exemplo 2

A linguagem L das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ onde cada ocorrência de um b é imediatamente precedida por um a. Por exemplo: $\lambda, a, abaab \in L$, mas $bb, bab, abb \notin L$.

Exemplo 2

A linguagem L das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ onde cada ocorrência de um b é imediatamente precedida por um a. Por exemplo: $\lambda, a, abaab \in L$, mas $bb, bab, abb \notin L$.

- **BASE:** $\lambda \in L$

Exemplo 2

A linguagem L das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ onde cada ocorrência de um b é imediatamente precedida por um a. Por exemplo: $\lambda, a, abaab \in L$, mas $bb, bab, abb \notin L$.

- **BASE:** $\lambda \in L$
- **PASSO RECURSIVO:** Se $u \in L$ então $ua, uab \in L$

Exemplo 2

A linguagem L das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ onde cada ocorrência de um b é imediatamente precedida por um a. Por exemplo: $\lambda, a, abaab \in L$, mas $bb, bab, abb \notin L$.

- **BASE:** $\lambda \in L$
- **PASSO RECURSIVO:** Se $u \in L$ então $ua, uab \in L$
- **FECHO:** Só podem pertencer à L as palavras obtidas a partir da base com um número finito de aplicações do passo recursivo.

Sumário

Especificação finita de linguagens

Operações sobre conjuntos

Linguagens regulares

Expressões regulares

Linguagens

Para essas linguagens simples, funciona; mas e para linguagens mais complexas?

Vamos usar operações de conjuntos! Vamos criar conjuntos complexos a partir de conjuntos simples.

Concatenação de linguagens

Definição

A *concatenação* de duas linguagens X e Y, denotada por XY, é a linguagem $L = \{xy | x \in X, y \in Y\}$.

- $X^0 = \{\lambda\}$
- $X^1 = X$
- $X^2 = XX$
- $X^3 = X^2X$
- $\dots$

Fecho de Kleene

Definição

Seja X um conjunto. Então:

$$X^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} X^i$$

$$X^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^i$$

$$X^+ = XX^*$$

Para quê?

Fecho de Kleene é mais uma operação sobre conjuntos

Usar operações sobre conjuntos para descrever as linguagens sem ambiguidade.

Exemplo 3

Defina L como a linguagem de todas as palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ de maneira que L contenha todas, e apenas, as palavras que contêm a subpalavra bb.

Exemplo 3

Defina L como a linguagem de todas as palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ de maneira que L contenha todas, e apenas, as palavras que contêm a subpalavra bb.

- $L = \{a, b\}^*\{bb\}\{a, b\}^*$

Exemplo 4

Defina L como a linguagem de todas as palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ de maneira que L contenha todas, e apenas, as palavras que iniciam pela subpalavra aa ou terminam com a subpalavra bb.

Exemplo 4

Defina L como a linguagem de todas as palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ de maneira que L contenha todas, e apenas, as palavras que iniciam pela subpalavra aa ou terminam com a subpalavra bb.

- Palavras que têm prefixo aa : $\{aa\}\{a, b\}^*$
- Palavras que têm sufixo bb : $\{a, b\}^*\{bb\}$
- Logo, L é a união das duas:
  $L = \{aa\}\{a, b\}^* \cup \{a, b\}^*\{bb\}$

Exemplo 5

Seja $L_1 = \{bb\}$ e $L_2 = \{\lambda, bb, bbbb\}$.

- Ambas são linguagens sobre $\Sigma = \{b\}$
- $L_1^* = L_2^*$: o conjunto das palavras constituídas por um número par de bs (conjuntos não possuem elementos repetidos).

Exemplo 6

O conjunto $\{aa, bb, ab, ba\}^*$ contém todas as palavras de tamanho par sobre $\{a, b\}$.

Para especificar a linguagem das palavras de tamanho ímpar, podemos usar a diferença de conjuntos: $\{a, b\}^* - \{aa, bb, ab, ba\}^*$

Podemos especificar a mesma linguagem de outra maneira: $\{a, b\}\{aa, bb, ab, ba\}^*$

Sumário

Especificação finita de linguagens

Operações sobre conjuntos

Linguagens regulares

Expressões regulares

Conjuntos regulares

Definição

Seja Σ um alfabeto. Os *conjuntos regulares* sobre Σ são definidos recursivamente assim:

- **BASE:** Os conjuntos $\emptyset, \{\lambda\}, \{a\}, \forall a \in \Sigma$, são conjuntos regulares.

Conjuntos regulares

Definição

Seja Σ um alfabeto. Os *conjuntos regulares* sobre Σ são definidos recursivamente assim:

- **BASE:** Os conjuntos $\emptyset, \{\lambda\}, \{a\}, \forall a \in \Sigma$, são conjuntos regulares.
- **PASSO RECURSIVO:** Sejam X e Y dois conjuntos regulares sobre Σ. Então os conjuntos $X \cup Y, XY, X^*$ são conjuntos regulares sobre Σ.

Conjuntos regulares

Definição

Seja Σ um alfabeto. Os *conjuntos regulares* sobre Σ são definidos recursivamente assim:

- **BASE:** Os conjuntos $\emptyset, \{\lambda\}, \{a\}, \forall a \in \Sigma$, são conjuntos regulares.
- **PASSO RECURSIVO:** Sejam X e Y dois conjuntos regulares sobre Σ. Então os conjuntos $X \cup Y, XY, X^*$ são conjuntos regulares sobre Σ.
- **FECHO:** X é regular sobre Σ somente se for obtido a partir da base com um número finito de aplicações do passo recursivo.

Conjuntos regulares

Com essa definição, limitamos as operações sobre conjuntos que podemos usar na especificação de linguagens.

Os exemplos 3 a 6 que vimos até agora são regulares?

Exemplo 7

Demonstrando que o exemplo 3 é regular

A linguagem L das palavras contendo a subpalavra bb é regular sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

Prova:

- **BASE:** $\{a\}$ e $\{b\}$ são regulares por definição.
- Aplicando o fecho de Kleene e união:
  - $\{a, b\}^*$ é regular.
  - $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ é regular.
- Por concatenação: $\{b\}\{b\} = \{bb\}$ é regular.
- Portanto, usando concatenação novamente: $\{a, b\}^*\{bb\}\{a, b\}^*$ é regular.

Exemplo 8

A linguagem das palavras que começam e terminam por a e têm pelo menos um b é regular sobre $\Sigma = \{a, b\}$.

$$\{a\}\{a, b\}^*\{b\}\{a, b\}^*\{a\}$$

Sumário

Especificação finita de linguagens

Operações sobre conjuntos

Linguagens regulares

Expressões regulares

INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

Conjuntos regulares

Problema

É trabalhoso usar a definição de conjuntos.

Vamos usar uma *representação* para facilitar a tarefa de especificar linguagens.

Expressões regulares

- Ignorar as chaves: $\{,\}$.
- Troca do símbolo de união $\cup$ por $+$.
- Troca do fecho de Kleene por $*$.
- Troca da concatenação por justaposição.

Expressões regulares

Definição

Seja Σ um alfabeto. As *expressões regulares* sobre Σ são definidas recursivamente assim:

- **BASE:** $\emptyset, \lambda, a, \forall a \in \Sigma$, são expressões regulares.

Expressões regulares

Definição

Seja Σ um alfabeto. As *expressões regulares* sobre Σ são definidas recursivamente assim:

- **BASE:** $\emptyset, \lambda, a, \forall a \in \Sigma$, são expressões regulares.
- **PASSO RECURSIVO:** Sejam u e v expressões regulares sobre Σ. Então as expressões a seguir também são regulares sobre Σ:
  - $(u + v)$
  - (uv)
  - (u^*)

EDERAL

Expressões regulares

Definição

Seja Σ um alfabeto. As *expressões regulares* sobre Σ são definidas recursivamente assim:

- **BASE:** $\emptyset, \lambda, a, \forall a \in \Sigma$, são expressões regulares.
- **PASSO RECURSIVO:** Sejam u e v expressões regulares sobre Σ. Então as expressões a seguir também são regulares sobre Σ:
  - $(u + v)$
  - (uv)
  - (u^*)
- **FECHO:** ...

Expressões regulares

União e concatenação são associativas: podemos omitir os parênteses, mantendo a seguinte ordem:

1. Fecho de Kleene
2. Concatenação
3. União

Exemplo 9

Refazendo o exemplo 3

A linguagem das palavras contendo a subpalavra bb é regular sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

Exemplo 9

Refazendo o exemplo 3

A linguagem das palavras contendo a subpalavra *bb* é regular sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

- $(a+b)^*bb(a+b)^*$

Exemplo 10

Refazendo o exemplo 8

A linguagem das palavras que começam e terminam por a e têm pelo menos um b.

Exemplo 10

Refazendo o exemplo 8

A linguagem das palavras que começam e terminam por a e têm pelo menos um b.

- $a(a+b)^*b(a+b)^*a$

Exemplo 11

Expressão regular sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ para a linguagem das palavras contendo aa ou bb.

Exemplo 11

Expressão regular sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ para a linguagem das palavras contendo aa ou bb.

- $(a + b)^*aa(a + b)^* + (a + b)^*bb(a + b)^*$

Exemplo 12

Expressão regular sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ para a linguagem das palavras contendo exatamente dois bs.

Exemplo 12

Expressão regular sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ para a linguagem das palavras contendo exatamente dois bs.

- $a^*ba^*ba^*$

Exemplo 13

Expressão regular sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ para a linguagem das palavras contendo dois ou mais bs.

Exemplo 13

Expressão regular sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ para a linguagem das palavras contendo dois ou mais bs.

- $a^*ba^*b(a+b)^*$
- $(a+b)^*b(a+b)^*b(a+b)^*$

Duas expressões regulares para a mesma linguagem: dizemos que são equivalentes.

Exemplo 14

Expressões regulares sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ para a linguagem das palavras que não contêm a subpalavra aa.

Exemplo 14

Expressões regulares sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ para a linguagem das palavras que não contêm a subpalavra aa.

- $b^*(ab^+)^* + (b^*(ab^+)^*a)$;
- $b^*(ab^+)^*(\lambda + a)$;
- $b^*(abb^*)^*(\lambda + a)$;
- $(b + ab)^*(\lambda + a)$

Exemplo 15

Expressões regulares sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ para a linguagem das palavras que contêm a subpalavra bc.

Exemplo 15

Expressões regulares sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ para a linguagem das palavras que contêm a subpalavra bc.

- $(a + b + c)^* bc(a + b + c)^*$

Exemplo 16

Expressões regulares sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ para a linguagem das palavras que contêm uma única ocorrência de bb.

Exemplo 16

Expressões regulares sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ para a linguagem das palavras que contêm uma única ocorrência de bb.

- $(a + ba)^* bb(a + ba)^*$

Equivalências

1.	$r + s = s + r$	11.	$r^{**} = r^*$
2.	$r + \emptyset = r$	12.	$r^* = (rr)^*(\lambda + r)$
3.	$r + r = r$	13.	$\emptyset^* = \lambda$
4.	$r\lambda = \lambda r = r$	14.	$\lambda^* = \lambda$
5.	$r\emptyset = \emptyset r = \emptyset$	15.	$r^* r^* = r^*$
6.	$(r + s)t = rt + st$	16.	$rr^* = r^* r$
7.	$r(s + t) = rs + rt$	17.	$(r^* + s)^* = (r + s)^*$
8.	$(r + s)^* = (r^* s)^* r^*$	18.	$(r^* s^*)^* = (r + s)^*$
9.	$(r + s)^* = r^*(sr^*)^*$	19.	$r^*(r + s)^* = (r + s)^*$
10.	$(rs)^* = \lambda + r(sr)^* s$	20.	$(r + s)^* r^* = (r + s)^*$

Figura: Algumas equivalências de expressões regulares. Fonte: NV 2.6

INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais