

Linguagens formais e autômatos

Linguagens

Gabriel V C Candido
gabriel.candido@ifpr.edu.br

Instituto Federal do Paraná - Pinhais

Sumário

Apresentação

Linguagens

Sumário

Apresentação

Linguagens

Linguagens e máquinas

Linguagens e máquinas são conceitos intimamente relacionados.

Vamos começar com algumas definições e então trabalharemos com linguagens.

Posteriormente, entraremos nos conceitos de máquinas.



Linguagens

Estudaremos como expressar, reconhecer, gerar e enumerar linguagens.

Nosso objetivo é conhecer os diferentes tipos de linguagens, qual a relação de linguagens com máquinas, e os limites de cada tipo de linguagem.

Linguagens

- ▶ Linguagem natural
- ▶ Linguagem matemática
- ▶ Linguagem de computadores
- ▶ ...

Usaremos a teoria dos conjuntos para definir linguagens.

Também usaremos definições recursivas, que facilitarão o uso de provas por indução.

Sumário

Apresentação

Linguagens

Alfabeto

Definição

Um *alfabeto* é um conjunto finito não vazio de objetos indivisíveis. Σ denotará este alfabeto.

Os elementos de um alfabeto são chamados *símbolos*.

A partir do alfabeto, construiremos *palavras*.

Exemplo: $\Sigma = \{0, 1\}$.

Palavra

Definição

Uma *palavra* (ou *string*) sobre um alfabeto Σ é uma sequência finita de símbolos de Σ .

O tamanho de uma palavra x , denotado por $|x|$, é o número de símbolos que a compõem.

Existe a *palavra vazia*, constituída de zero símbolos. A palavra vazia será denotada por λ . Portanto, $|\lambda| = 0$.

Palavra

Exemplo

$$\Sigma = \{0, 1\}.$$

São palavras sobre Σ : $\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots$

Exemplo

$$\Sigma = \{1\}.$$

São palavras sobre Σ : $\lambda, 1, 11, 111, \dots$

Como representar os números naturais com cada um desses dois alfabetos?

Palavra

Exemplo

$\Sigma = \{0, 1\}$.

São palavras sobre Σ : $\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots$

Palavra

Exemplo

$\Sigma = \{0, 1\}$.

São palavras sobre Σ : $\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots$

Tamanho para representar n na base 2: $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

Palavra

Exemplo

$$\Sigma = \{1\}.$$

São palavras sobre Σ : $\lambda, 1, 11, 111, \dots$

Tamanho para representar n na base 1: n



Palavra

Exemplo

$$\Sigma = \{a, b, c\}.$$

Exemplos de palavras sobre Σ : *aabcacba*, *cabbacca*



Palavra

Exemplo

Σ = verbetes do dicionário de Português.

Exemplo de palavra sobre Σ : comida casa olimpíada
abrir são computador.

Banana é diferente de Ba nana.

Palavra

Notação

Se a é um símbolo qualquer, então a^n será a notação para a palavra constituída de n a s em sequência.

Exemplo

$$1^0 = \lambda$$

$$0^4 = 0000$$

$$1^3 0 1^2 = 111011$$

Conjunto de palavras

Definição

Seja Σ um alfabeto. Então Σ^* será o conjunto de palavras sobre Σ .

Linguagem

Definição

Uma *linguagem* é um conjunto de palavras sobre um alfabeto. Alternativamente, uma linguagem é um subconjunto de Σ^* .

Exemplo

Seja o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$. Então o conjunto de todas as palavras sobre Σ é

$$\Sigma^* = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$$

Linguagens sobre Σ :

- ▶ $\emptyset$. É a linguagem mais simples, não contém palavras;
- ▶ $\{\lambda\}$;
- ▶ $\{0\}$;
- ▶ $\{\lambda, 0\}$;



Exemplo

Seja o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$. Então o conjunto de todas as palavras sobre Σ é

$$\Sigma^* = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$$

Linguagens sobre Σ :

- ▶ $\{w \in \Sigma \mid 1 \leq |w| \leq 5\}$. Contém $\sum_{i=1}^5 2^i$ palavras;
- ▶ $\{0^n \mid n \text{ é primo}\}$. Esta linguagem é infinita;
- ▶ $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Constituída de toda palavra de tamanho par cuja primeira metade só contém 0s e a segunda metade só contém 1s;
- ▶ Σ^* .

Concatenação

Definição

A *concatenação* de duas palavras $x = a_1 a_2 \dots a_m$ e $y = b_1 b_2 \dots b_n$ é a palavra $xy = a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n$.

Note que $\lambda w = w \lambda = w$.

Nossa definição implica que a concatenação é *associativa*: $x(yz) = (xy)z$.

Também podemos expressar a concatenação de uma palavra com ela mesma: w^2 .

Concatenação

Exemplo

Sejam $u = ab$, $v = ca$, $w = bb$. Então
 $uv = abca$; $vw = cabb$; $(uv)w = abcabb$; $u(vw) = abcabb$.

Exemplo

Sejam $x = aab$, $y = cc$. Então $yx = ccaab$; $x^2 = xx = aabaab$; $xy^2 = aab(cc)^2 = aabccccc$; $axbbbyc = aaabbbccc = a^3b^3c^3$; $\lambda(aa)^3\lambda\lambda y^3\lambda = a^6c^c$.

Concatenação

A concatenação não é comutativa!

Exemplo

Sejam $u = ab$, $v = ca$. $uv = abca \neq caab = vu$.

Portanto, $u^2 = (ab)^2 = abab \neq aabb = a^2b^2$.

Subpalavra

Definição

u é subpalavra de v se $\exists x, y \in \Sigma^* \mid v = xuy$.

Se está em Σ^* , pode ser λ !

Prefixo e sufixo

Definição

x é *prefixo* de w se $w = xy$ para alguma palavra y .

Definição

x é *sufixo* de w se $w = yx$ para alguma palavra y .

Prefixo e sufixo

Exemplo

Considere a palavra *abc*. Seus prefixos são λ , *a*, *ab*, *abc*. Seus sufixos são λ , *c*, *bc*, *abc*.

Reverso

Definição

O *reverso* de $w = a_1 a_2 \dots a_n$ é a sequência de símbolos na ordem reversa, $w^R = a_n \dots a_2 a_1$.